J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
79 (2008) 479-516

SURFACES ISOTROPES DE $\mathbb{O}$ ET SYSTÈMES INTÉGRABLES

Idrisse Khemar

Résumé

We define a notion of isotropic surfaces in $\mathbb{O}$, i.e., on which some canonical symplectic forms vanish. Using the cross-product in $\mathbb{O}$ we define a map $\rho\colon Gr_2(\mathbb{O}) \to S^6$ from the Grassmannian of $\mathbb{O}$ to S^6. This allows us to associate to each surface Σ of $\mathbb{O}$ a function $\rho_\Sigma\colon \Sigma \to S^6$. Then we show that the isotropic surfaces in $\mathbb{O}$ such that ρ_Σ is harmonic are solutions of a completely integrable system. Using loop groups we construct a Weierstrass type representation of these surfaces. By restriction to $\mathbb{H} \subset \mathbb{O}$ we obtain as a particular case the Hamiltonian Stationary Lagrangian surfaces of $\mathbb{R}^4$, and by restriction to $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ we obtain the CMC surfaces of $\mathbb{R}^3$.

Introduction

Dans cet article, nous étudions certaines surfaces isotropes de $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$. L'idée de s'intéresser à de telles surfaces vient de la volonté de chercher des analogues aux surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires de $\mathbb{R}^4$, dans $\mathbb{R}^8$. Ces surfaces de $\mathbb{R}^4$ forment un système complètement intégrable présentant une structure inédite (cf. [**9**]) et il est naturel d'en chercher des généralisations dans $\mathbb{R}^8$ (cf. [**13**]).

Considérons une surface Σ lagrangienne de $\mathbb{R}^4$. On peut localement trouver une paramétrisation conforme de Σ par des coordonnées $(u, v) \in \Omega$, Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^2$, i.e., une immersion $X : \Omega \to \mathbb{R}^4$ telle que

$$dX = e^f(e_1du + e_2dv)$$

avec (e_1, e_2) base hermitienne de $\mathbb{C}^2$ pour tout $(u, v) \in \Omega$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. L'identification entre $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{C}^2$ est donnée par $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4)$. A la surface Σ est associé *l'angle lagrangien* β défini par $e^{i\beta} = \det(e_1, e_2)$ (qui ne dépend pas de la paramétrisation choisie car il ne dépend que du plan tangent $T_{X(u,v)}\Sigma = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$).

Maintenant considérons la fonctionnelle d'aire $\mathcal{A}(\Sigma) = \int_\Sigma dv$ sur l'ensemble des surfaces orientées lagrangiennes de $\mathbb{R}^4$. Un point critique pour cette fonctionnelle est une surface lagrangienne Σ telle que $\delta\mathcal{A}(\Sigma)(X) =$

Received 11/10/2006.