91. Über die Nullstellen der von Potenzsummen der natürlichen Zahlen definierten Polynome

Von Noriaki KIMURA
College of Industrial Technology, Nihon University

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Sept. 13, 1982)

Es handelt sich in [1] um die Nullstellen der Polynome $P_k(x) \in \boldsymbol{Q}[x]$, $k \in \boldsymbol{N}$, die durch

$$P_k(n)=\sum_{\nu=1}^{n} \nu^k \qquad \text{für alle } n \in \boldsymbol{N}$$

erklärt sind. Da wurde es beweisen, daß kein $P_k(x)$ andere rationale Nullstellen haben kann als $x=0$, $x=-1$, $x=-1/2$. In der vorliegenden Arbeit beweisen wir zwei Sätze über die Nullstellen dieser Polynome. Der Satz 1 behauptet, daß kein $P_k(x)$ imaginäre Nullstellen haben kann, deren reelle Teile zwischen -1 und 0 liegen. Der Satz 2 gibt Auskunft über die Nullstellen in den quadratischen Zahlkörpern.

Satz 1. *$P_k(z)\neq 0$ für $z \in \boldsymbol{C}$, $\mathcal{J}(z) \neq 0$, $-1 \leqq \mathcal{R}(z) \leqq 0$, wobei $\mathcal{J}(z)$ bzw. $\mathcal{R}(z)$ den imaginären Teil bzw. den reellen Teil von z respektiv bedeutet.*

Beweis. Nach der Formel (6) in [1], d.h.

$$P_k(-x)=(-1)^{k+1}P_k(x-1) \qquad (k\geqq 1)$$

genügt es zu beweisen, daß $P_k(z)\neq 0$ für $\mathcal{J}(z)\neq 0$, $-1\leqq \mathcal{R}(z)\leqq -1/2$ ist. Setze $z=x-1+yi$, $x, y \in \boldsymbol{R}$, $i=\sqrt{-1}$. Für $y>0$, $0\leqq x\leqq 1/2$ beweisen wir $P_k(x-1+yi)\neq 0$.

In Anbetracht der Darstellung der $P_k(x)$ durch Bernoullische Polynome $B_m(x)$ bzw. Bernoullische Zahlen B_m, haben wir

$$\begin{aligned}(k+1)P_k(z)&=(k+1)P_k(x-1+yi)\\ &=\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}(yi)^{k+1-j}B_j(x)-B_{k+1}.\end{aligned}$$

Dabei sind die folgenden vier Fälle zu unterscheiden.

(1) Fall $k\equiv 1 \pmod 4$.

Wenn $0<x<1/2$ ist,

$$(k+1)\mathcal{J}(P_k(z))=\frac{1}{i}\sum_{\substack{0\leqq j\leqq k+1\\ j;\ \text{ungerade}}}\binom{k+1}{j}(yi)^{k+1-j}B_j(x)<0.$$

Ist nämlich $j=2m+1$, $m\geqq 0$, so folgt

$$i^{k-j}B_j(x)=(-1)^m B_{2m+1}(x)<0$$

(s. [2]).

Für $x=1/2$, haben wir