241. *Quelques exemples des ζ-fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre. II*

Par Norio SHIMAKURA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Dec. 12, 1970)

Ce petit mémoire est la suite de mon article précédent [4]. Premièrement, dans le paragraphe 1 de [4], le Théorème 1 et la preuve du Théorème 2 contenaient des fautes (le Théorème 2 lui-même a été sauvé). Je vais les corriger dans le paragraphe 4. Et le paragraphe 5 est consacré à citer un autre exemple simple des ζ-fonctions d'Epstein.

§ 4. Je vais reproduire tous les contenus du § 1 dans [4]. Soient n un entier$\geqq 2$ et Ω la boule unitaire de $\boldsymbol{R}^n$:

$$\Omega=\left\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n\,;\,|x|\equiv\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}<1\right\}. \tag{1}$$

Traitons, dans Ω, un opérateur différentiel L elliptique dégénéré au bord

$$Lu(x)=-\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{(1-|x|^2)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right\}+(n-1)u(x). \tag{2}$$

L est auto-adjoint positif dans $L^2(\Omega)$ du domaine $\mathscr{D}[L]=\{u(x)\in H^1(\Omega)\,;\,(1-|x|^2)u(x)\in H^2(\Omega)\}$. Son spectre se consiste des valeurs propres positives $\{\lambda_{k,l}\}_{k,l=0}^{\infty}$ dont chacune $\lambda_{k,l}$ est de multiplicité $\mu(k)<\infty$, où

$$\lambda_{k,l}=(2l+2)(2l+2k+n-1),\ \text{pour}\ k,l=0,1,2,\cdots; \tag{3}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\mu(0)=1\ \text{et}\ \mu(k)=2\ \text{pour}\ k\geqq 1,\ \text{si}\ n=2;\\ \mu(k)=(2k+n-2)\dfrac{(k+n-3)!}{k!(n-2)!}\ \text{pour}\ k\geqq 0,\ \text{si}\ n\geqq 3.\end{array}\right\} \tag{4}$$

Proposition 1. (α) *$\{\lambda_{k,l}\}_{k,l=0}^{\infty}$ est la totalité des valeurs propres de L dont chacune $\lambda_{k,l}$ est de multiplicité $\mu(k)<\infty$;*

(β) *Pour (k,l) fixe, une base des fonctions propres correspondante à $\lambda_{k,l}$ est formée par les $\mu(k)$ fonctions (normalisées) suivantes*

$$u_{k,l,\alpha}(x)=\sqrt{4l+2k+n}\,P_l^{(0,k+\nu)}(2|x|^2-1)H_{k,\alpha}(x),\quad \textit{pour}\ k,l=0,1,2,\cdots;\ 1\leqq\alpha\leqq\mu(k), \tag{5}$$

où $\{H_{k,\alpha}(x)\}_{\alpha=1}^{\mu(k)}$ est une base des polynômes harmoniques homogènes d'ordre k, les $P_l^{(a,b)}(t)$ sont les polynômes de Jacobi (voir p. 168 du Vol. 2 de [2]), et dernièrement $\nu=(n-2)/2$.

Soit maintenant $T>0$ très grand et désignons par $N(T)$ la somme des $\mu(k)$ pour lesquelles $\lambda_{k,l}\leqq T$. Alors, Théorème 1 dans [4] se corrige comme suit:

Theoreme 1. *Lorsque T tend vers l'infini, $N(T)$ se comporte asymptotiquement comme suit:*