153. *Dérivation par Rapport à un Système de Voisinages dans l'Espace de Tore*

Par Shizu ENOMOTO

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Oct. 12, 1954)

1. Soient I l'ensemble des nombres réels modulo 1 et J l'ensemble des nombres naturels 1, 2, ..., j. Désignons par $I^J = \underset{i \in J}{P} (I_i = I)$ l'espace de tore à un nombre fini j de dimensions, c.-à-d. le produit cartésien d'espaces I_i $(i=1, 2, \ldots, j)$ identiques à I. On sait que, n désignant un entier naturel, les cubes $V_n(x)$ de centre $x \in I^J$ et de côté $1/n$ forment un système dérivant pour les fonctions d'ensemble absolument continues: Soit $\Phi_J(A)$ une fonction d'ensemble, à valeurs numériques, définie sur la famille $(\mathfrak{M}_J)$ des ensembles mesurables au sens de Lebesque dont la mesure sera désignée par μ_J. Si la fonction d'ensemble $\Phi_J(A)$ est complètement additive et absolument continue — par conséquent, s'il y a une fonction $f(x)$ telle que $\Phi_J(A) = \int_A f(x) d\mu_J(x)$ pour tout $A \in (\mathfrak{M}_J)$, alors la fonction

$$g_n(x) = \Phi_J(V_n(x))/\mu_J(V_n(x))$$

tend presque partout vers $f(x)$ dans I^J.[1]

Mais, M. J. Dieudonné a montré, dans son travail "Sur un théorème de Jessen, Fund. Math., **37** (1950)", que le résultat analogue ne reste pas valable pour l'espace du tore $I^N = \underset{i \in N}{P} (I_i = I)$, $N = \{1, 2, \ldots\}$, à un nombre dénombrablement infini de dimensions. Pour montrer le résultat plus précis, introduisons d'abord les notations suivantes.

Pour chaque partition de N en deux parties complémentaires J, J'. On peut identifier I^N au produit cartésien $I^J \times I^{J'}$. Pour tout $x = (x_i) \in I^N$, nous désignerons par x_J et $x_{J'}$, les projéctions de x sur I^J et $I^{J'}$, de sorte que $x = (x_J, x_{J'})$. Considérons sur chaque $I_i = I$ la mesure de Lebesgue, et désignerons par μ la mesure produite de ces mesures sur l'espace I^N, nous désignerons de même par μ_J la mesure produite sur l'espace I^J. Désignerons par $(\mathfrak{M})$ la famille d'ensembles mesurables au sens de Carathéodory par la mesure μ sur I^N. Désormais, nous supposons que J désigne une partie finie de N et J' désigne le complémentaire de J. Par $\mathfrak{N}$ nous désignons l'ensemble de parties finies J de N. Pour toute partie finie J de N et tout entier naturel n, désignons par $V_{n,J}(x)$ le produit cartésien du cube de centre x_J et de côté $1/n$ dans I^J, et de $I^{J'}$.

1) S. Saks: Theory of the Integral (1937).