30. Bemerkungen über die Existenz der algebraisch abgeschlossenen Erweiterung

Von Kenjiro SHODA, M.J.A.

(Comm. March 12, 1955)

In einer früheren Arbeit[1] haben wir die Theorie der algebraischen Erweiterungen eines algebraischen Systems studiert und den folgenden Satz bewiesen. Beschränken wir uns auf die Systeme mit den Grundvoraussetzungen, die wir bis jetzt[2] in der Untersuchungen der algebraischen Systeme stets angenommen haben, sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend für die Existenz der algebraisch abgeschlossenen (algebraischen) Erweiterung Ω eines algebraischen Systems $\mathfrak{A}$:

a) Ist $\mathfrak{A}'$ algebraisch über $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}''$ algebraisch über $\mathfrak{A}'$, so ist $\mathfrak{A}''$ algebraisch über $\mathfrak{A}$.

b) Ist α ein algebraisches Element über $\mathfrak{A}$, so ist das durch Adjunktion von α entstehende System $\mathfrak{A}(\alpha)$ algebraisch über $\mathfrak{A}$.

c) Jedes Polynom von $\mathfrak{A}'(x)$ für eine algebraische Erweiterung $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ besitzt ein Zerfällungssystem.

Dabei versteht man unter einem Zerfällungssystem eines Polynoms $f(x)$ von $\mathfrak{A}(x)$ eine algebraische Erweiterung $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{A}$ derart, dass jede Wurzel von $f(x)$ in einer $\mathfrak{Z}$ enthaltenden algebraischen Erweiterung von $\mathfrak{A}$ schon in $\mathfrak{Z}$ enthalten ist.

Die Bedingung c) kann man, wie man im Beweis des Satzes leicht einsehen kann, durch die folgenden ersetzen.

c′) Jedes Polynom von $\mathfrak{A}'(x)$, die eine Erweiterung eines irreduziblen Polynoms von $\mathfrak{A}(x)$ ist, besitzt ein Zerfällungssystem.

Sind die Untersysteme der vorkommenden Systeme stets normal, so gelten die Bedingungen a), b), wie wir in A. E. bewiesen haben. In der vorliegenden Note beweisen wir c′). Dann erkennt man die Richtigkeit von c) und die von dem folgenden Satz.

Satz. *Jedes Untersystem sei normal. Dann besitzt ein System stets eine algebraisch abgeschlossene Erweiterung.*

Es sei x ein transzendentes Element über $\mathfrak{A}$. Bezeichnet man das durch x erzeugte freie System mit $\mathfrak{X}$, so ist $\mathfrak{A}(x)=\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}$. Der Kern eines Polynoms $f(x)$, aufgefasst als eine Kongruenz von $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}$, ist ein Untersystem $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{A}\frown\mathfrak{F}=0$. Daher wird $\mathfrak{F}$ durch eine

1) K. Shoda: Zur Theorie der algebraischen Erweiterungen, Osaka Math. J., **4**, 133-143 (1952), zitiert mit A. E. Diese Note soll als bekannt angenommen werden.

2) K. Shoda: Über die allgemeinen algebraischen Systeme, I–VIII, Proc. Imp. Acad., **17–20** (1941–1944); Allgemeine Algebra, Osaka Math. J., **1**, 182–225 (1949).