29. *Théorème de Krein-Milman et le Balayage de Mesures dans la Théorie du Potentiel. III*

Par Shin-ichi MATSUSHITA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Feb. 13, 1956)

§8. **Le cas d'un ensemble fermé général.** Il n'y a aucune difficulté pour étendre la définition de balayage aux ensembles compacts ou fermés généraux (au lieu d'un domaine compact): en effet, on peut aller d'une manière toute analogue au cas qui a été étudié aux paragraphes précédents §§1–7.[1]

1°) *Le cas d'un compact K.* Les résultats que nous avons obtenu dans les numeros précédents restent tout entier vrais quand même nous remplacerions le domaine compact $\overline{D}$ par un compact K en considérant $int\ (K)=D$ (il se pourrait que $int\ (K)=0$, mais encore le principe de la démonstration énoncée dans §§1–6 sont bien valide comme nous le verrons aisément).[2]

2°) *Le cas d'un fermé non borné.* Soit F un ensemble fermé non borné quelconque; alors on n'aura maintenant qu'à remplacer $\mathfrak{M}_0^+(D)$ et $M^\wedge(D)$ par $\mathfrak{M}_1^+(F)$ et $M_1^\wedge(F)$ respectivement:

$\mathfrak{M}_1^+(F)$=ensemble convexe des mesures positives de norme $\leqq 1$ sur F,

$M_1^\wedge(F)$=ensemble des fonctionnelles linéaires continues définies par (2.1) pour toute mesures $\mu \in \mathfrak{M}_1^+(F)$ sur l'espace vectoriel normé $H(F)$.[3]

Comme $\mathfrak{M}(E)$ est un espace de Montel, $\mathfrak{M}_1^+(F)$ est encore vaguement compact et d'après la continuité d'application $\mu \to \mu^\wedge$, $M_1^\wedge(F)$ est compact (et convexe) dans le dual topologique $H^\wedge(F)$ à l'espace vectoriel $H(F)$ muni de la topologie faible; ainsi, la Proposition 1 reste valide pour $M_1^\wedge(F)$.

En désignant l'ensemble des points extrémaux distincts de $0^\wedge$ de $M_1^\wedge(F)$ par $Ext.\ M_1^\wedge(F)$,[4] la Proposition 2 est vraie en remplaçant $Ext.\ M^\wedge(D)$ par $Ext.\ M_1^\wedge(F)$. Toutefois, dans la partie 1°) de sa démonstration, il est besoin de faire une petite modification, c'est-à-dire, comme il est évident qu'il existe un point $z \in E-F$ tel que

1) S. Matsushita: Théorème de Krein-Milman et le balayage de mesures dans la théorie du potentiel. I et II, Proc. Japan Acad., **31**, 643–647 (1955); **32**, 29–34 (1956).

2) Désignons par $int\ (A)$ l'intérieur d'un ensemble A.

3) $H(F)$=espace vectoriel normé des potentiels newtoniens continues des mesures de $\mathfrak{M}^*(E-F)$, cf. §1.

4) Comme $\mathfrak{M}_1^+(F)$ est compact et convexe, le théorème de Krein-Milman est aussi applicable pour $\mathfrak{M}_1^+(F)$; il est évident que $0^\wedge$(*fonctionnelle nulle*) est un point extrémal quand F n'est pas compact.