8. L'Homologie du Produit Cyclique d'Ordre p d'un Complexe Fini (p Premier Impair)

Par Tsunéo YOSHIOKA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Jan. 13, 1958)

1. Soit K un espace topologique, K^p le produit de p espaces homéomorphes à K, Π le groupe cyclique d'ordre p engendré par la permutation cyclique des coordonnées de K^p : $T(x_1, x_2, \cdots, x_p) = (x_2, \cdots, x_p, x_1)$, $Q = K^p/\Pi$ l'espace quotient de K^p par Π, qui s'appelle le produit cyclique d'ordre p de l'espace K. Dans ce mémoire, K sera supposé un complexe fini connexe, dont l'homologie est connue, et p premier impair.

Pour le cas où $p=2$, S. K. Stein a établi l'homologie à coefficients entiers de Q [1]. D'autre part, M. Nakaoka a déterminé la cohomologie à valeurs entières de Q pour p premier et pour K complexes élémentaires [2]. Ce mémoire n'est consacré qu'à énoncer les résultats qui donnent l'homologie à coefficients entiers de Q et à déterminer les homologies spéciales de deux complexes M et $M(t)$ donnés dans 3°, à l'aide desquelles on a une base canonique d'homologie de Q. Une grande partie de la méthode pour démontrer le dernier théorème est due à Stein et deux complexes M et $M(t)$ m'ont été signalés par Nakaoka.

Désignons par $R_i(X)$ le i-ème nombre de Betti de l'espace X et par $t_i(X, q^r)$ (q premier et r entier positif) le nombre des i-èmes nombres de torsion de X divisibles par q^r. Les nombres de Betti et les nombres de torsion de Q seront déterminés par les formules suivantes, dont les deux premières sont bien connues.

$$(1)\qquad R_i(Q)=\begin{cases} \dfrac{1}{p}R_i(K^p) & \text{pour } i\not\equiv 0 \bmod p,\\[2mm] \dfrac{1}{p}R_i(K^p)+\dfrac{p-1}{p}R_{i/p}(K) & \text{pour } i\equiv 0 \bmod p;\end{cases}$$

$$(2)\qquad t_i(Q, q^r)=\frac{1}{p}t_i(K^p, q^r)+(-1)^j\frac{p-1}{p}t_{(i-j)/p}(K, q^r);$$

$$(3)\qquad t_i(Q, p)=\begin{cases} \dfrac{1}{p}t_i(K^p, p)+\dfrac{p-1}{p}t_{(i-j)/p}(K, p) & \\ \qquad +\displaystyle\sum_{\frac{i+1}{p}\le s\le i-2} t_s(K, p)+\sum_{\substack{\frac{i+1}{p}\le s\le i-2\\ ps-i:\ \text{pair}}} B_s(K) & \text{pour } j \text{ pair},\\[2mm] \dfrac{1}{p}t_i(K^p, p)+\dfrac{1}{p}t_{(i-j)/p}(K, p) & \\ \qquad +\displaystyle\sum_{\frac{i+1}{p}\le s\le i-2} t_s(K, p)+\sum_{\substack{\frac{i+1}{p}\le s\le i-2\\ ps-i:\ \text{pair}}} B_s(K) & \text{pour } j \text{ impair};\end{cases}$$