# 16. *L'Intégration des Fonctions à Valeurs Vectorielles d'après la Méthode des Espaces Rangés*

Par Hatsuo OKANO
Université d'Osaka

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Feb. 12, 1959)

En utilisant la théorie des espaces rangés, Prof. K. Kunugi a introduit une nouvelle définition de l'intégrale (qu'on appelle l'intégrale $(E. R.)$) des fonctions à valeurs réelles.[1] Dans la présente Note nous considérons les fonctions à valeurs vectorielles et l'intégrales $(E. R.)$ de telles fonctions.

1. *Espaces vectoriels rangés.* Étant donné un espace $R$ où la topologie est donnée par un système de voisinages satisfaisant à l'axiomes $(A)$, $(B)$ de F. Hausdorff,[2] on dit qu'il est un *espace rangé*[3] s'il existe une famille des voisinages $\mathfrak{V}_n$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ qui satisfait à la condition:
( a ) Pour tout voisinage $v(p)$ du point $p$ et pour tout entier positif $n$, il existe un entier $m$, $m \geq n$, tel qu'il existe un voisinage $u(p)$ appartenant à la famille $\mathfrak{V}_m$ et qui est contenu dans $v(p)$. Un voisinage d'un point $p$ sera dit de rang $n$, s'il appartient à la famille $\mathfrak{V}_n$.

On dit qu'un espace rangé $R$ est un *espace vectoriel rangé réel* s'il satisfait à deux conditions suivantes:
( 1 ) $R$ est un espace vectoriel sur le corps des nombres réels.
( 2 ) $R$ est un groupe rangé[4] comme un groupe additif: tout voisinage $v(p)$ du point $p$ de rang $n$ est exprimable de la manière:
$$v(p) = V + p,^{5)}$$
où $V$ est un voisinage du point 0 de rang $n$.

Étant donné un espace vectoriel rangé réel, pour une suite monotone décroissante de voisinages
$$V_0 + p_0 \supseteq V_1 + p_1 \supseteq \cdots \supseteq V_n + p_n \supseteq \cdots,$$
on dit qu'elle est *fondamentale* si elle satisfait à deux conditions suivantes:
( 1 ) $V_n \in \mathfrak{V}_{\gamma_n}$, $\gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \cdots$; ( 2 ) $p_{2n} = p_{2n+1}$.

---

1) K. Kunugi: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I, Proc. Japan Acad., **32**, 215–220 (1956); H. Okano: $(ER)$-integral of Radon-Stieltjes type, ibid., **34**, 580–584 (1958).

2) F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 213 (1914).

3) Pour la terminologie concernant à l'espace rangé, cf. K. Kunugi: Sur les espaces complets et régulièrement complets. I, II, Proc. Japan Acad., **30**, 553–556, 912–916 (1954); H. Okano: Some operations on the ranked spaces, ibid., **33**, 172–176 (1957). Dans la présente Note nous ne considérons que le cas où $\omega_\nu = \omega_0$.

4) Voir H. Okano: Loc. cit. dans 3).

5) $V+p$ désigne l'ensemble de tous les points $q=r+p$ tels que $r \in V$.