106. *Une Généralisation d'un Théorème de Fatou concernant l'Intégrale de Poisson*

Par Hatsuo OKANO

Université d'Osaka

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Oct. 12, 1959)

On sait[1] qu', étant donnée une fonction $f(\theta)$ sommable sur $[-\pi, \pi]$, l'intégrale de Poisson

$$u(r, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}f(\theta)\,d\theta$$

définit une fonction harmonique à l'intérieur du cercle-unité, et, si en un point θ_0 l'intégrale indéfinie $F(\theta)$ de $f(\theta)$ admet une dérivée $F'(\theta_0)$, tend vers $F'(\theta_0)$ quand le point (r, φ) se rapproche au point $(1, \theta_0)$, passant entre deux cordes au point $(1, \theta_0)$. Dans la présente Note, nous allons montrer que ce fait est aussi valable sous la seule condition que $f(\theta)$ soit intégrable $(E. R.)$.

Pour la terminologie concernant à l'intégrale $(E. R.)$, nous nous conformons à la Note de Prof. K. Kunugi: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I.[2] Pour une fonction f intégrable $(E. R.)$ dans l'intervalle $[a, b]$, une suite fondamentale $\{V(A_n, \nu_n; f_n)\}$ jouissant de la propriété P* sera dite une suite génératrice de f si $f_n(x)$ tend vers la fonction $f=f(x)$ presque partout dans l'intervalle $[a, b]$.

Or, dans le but d'exclure quelques exceptions triviales, nous allons considérer la condition suivante de la suite génératrice $\{V(A_n, \nu_n; f_n)\}$:

(1) Pour tout $c\in A_n$, on a $\left|\int_a^c (f_{n+1}(x)-f_n(x))\,dx\right|<2^{-\nu_n}$.

Si une fonction $f(x)$ intégrable $(E. R.)$ sur $[a, b]$ admet une suite génératrice satisfaisant à la condition (1), alors l'intégrale $(E. R.)$ indéfinie $F(x)=(E. R.)\int_a^x f(t)\,dt$ de $f(x)$ est définie presque partout et sommable dans l'intervalle $[a, b]$. De plus, si $\varphi(x)$ jouit de la condition de Lipschitz dans $[a, b]$, alors $\varphi(x)f(x)$ est aussi intégrable $(E. R.)$ et

1) P. Fatou: Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Mat., **30** (1906). Voir aussi G. C. Evans: The Logarithmic Potential, Amer. Math. Soc. Col. Pub., VI (1929).

2) K. Kunugi: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I, Proc. Japan Acad., **32**, 215–220 (1956). Voir aussi K. Kunugi: Sur une généralisation de l'intégrale, Fundamental and Applied Aspects of Mathematics, **1**, 1–30 (1959); H. Okano: Sur les intégrales $(E. R.)$ et ses applications, à paraître dans Osaka Mathematical Journal.