26. *Sur les Convergences dans l'Espace Rangé*

Par Hatsuo OKANO
Université d'Osaka

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Feb. 13, 1961)

1. *Définition de l'espace rangé.*[1]—Soit R un espace muni d'un système de voisinages satisfaisant à deux conditions suivantes:[2]

(A) À chaque point $p\in R$ correspond au moins un voisinage. Chaque voisinage de p contient p.

(B) $u(p)$ et $v(p)$ étant deux voisinages du point p, il existe un voisinage de p contenu dans $u(p)\cap v(p)$.

On dit que R est un espace rangé si à tout nombre positif γ correspond une famille de voisinages $\mathfrak{V}_\gamma$ qui jouit de la condition suivante:

(a) Pour tout voisinage $v(p)$ du point p et pour tout nombre positif α, il existe un nombre réel β tel que $0<\beta<\alpha$ et un voisinage $u(p)$ de p appartenant à la famille $\mathfrak{V}_\beta$ et qui est contenu dans $v(p)$.

Une suite monotone décroissante de voisinages

$$v_1(p_1)\supseteq v_2(p_2)\supseteq\cdots\supseteq v_n(p_n)\supseteq\cdots$$

est dite fondamentale ou de Cauchy s'il existe une suite monotone décroissante de nombres réels (γ_n) qui converge vers 0 et telle que chaque $v_n(p_n)$ appartient à $\mathfrak{V}_{\gamma_n}$.[3]

Un espace rangé s'appelle complet si, pour toute suite de Cauchy $(v_n(p_n))$, l'intersection $\bigcap_n v_n(p_n)$ est non vide.

La notion des suites de Cauchy dans l'espace rangé est un outil de l'analyse mathématique. Nous allons l'appliquer à certains exemples concrets.

2. *La convergence* (*C*) *dans l'espace rangé.*—Étant donné un espace rangé R, on dit qu'une suite de points (p_n) converge (C) vers un point p dans R si, quelle que soit la suite partielle $(p_{n(k)})$, on en peut extraire une suite partielle $(p_{n(k(i))})$ satisfaisant à la condition suivante:

---

1) L'idée de l'espace rangé a été premièrement introduite par Prof. K. Kunugi dans la Note: Sur les espaces complets et régulièrement complets. I, Proc. Japan Acad., **30**, 553-556 (1954), pour arriver à une synthèse plus générale que l'espace métrique complet et que l'espace localement compact: *L'espace métrique complet et l'espace localement compact sont deux cas spéciaux de l'espaces rangés complets. Dans un espace rangé complet, tout ensemble ouvert est de deuxième catégorie* (le théorème de Baire).

2) Voir F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 213 (1914).

3) Cf. H. Okano: Sur les intégrales (*E.R.*) et ses applications, Osaka Math. J., **11**, 187-212 (1959). Pour la simplicité, dans la présente Note, nous excluons la condition:

$$p_{2n}=p_{2n+1} \text{ et } \gamma_{2n}>\gamma_{2n+1}.$$