67. *La Solvabilité de Certains Equations sur les Nombres Ordinaux Transfinis. III*

Par Sôkiti NAGAI

Institut de Mathématiques, l'Université d'Iwaté, Morioka, Japon

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., June 12, 1961)

11. Dans la suite,*) nous considérons le cas où $\zeta_1=\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0$. Pour ce cas, nous posons $\xi=\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\varepsilon$. Alors, pour m tel que $\beta_1 m=\alpha_1 g$ (donc $m>g$, et posons $l_1 m+g=l$) et a tel que $\mu_1 a=\lambda_1\nu$, il existe la relation suivante:

$$\xi_m a=\omega^{\alpha_1 l}\lambda_1\nu+w^{\alpha_1(l-1)+\bar{\alpha}}\sigma+\omega^{\alpha_1(l-l_1-1)+\bar{\alpha}}(\eta^{l_1}\mu_0+\varepsilon). \tag{11.1}$$

Donc, pour que ξ est représentable finiment ou presque finiment par rapport à η, il faut que les relation suivantes sont accomplis:

(11.2) $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_s^2$ $(s<r)$, $\alpha_{s+1}=\bar{\alpha}$ et $\alpha_1(l_1-1)\leq\alpha_0\leq\alpha_1 l_1$ $(l_1\geq 2)$ ou $\alpha_0=0$ (c'est-à-dire, $\varepsilon=0$), où la forme normale de ε est $\varepsilon=\alpha^{\alpha_0}\bar{\lambda}+\cdots$.

Par suite, pour ce cas, nous le classifierons les sous-cas suivants:

(i) $\alpha_0=\alpha_1 l_1$ et $\bar{\lambda}=\lambda_1$, (ii) $\alpha_0=\alpha_1 l_1$ et $\bar{\lambda}<\lambda_1$,
(iii) $\alpha_0=\alpha_1(l_1-1)+\alpha_k\,(2\leq k\leq r-s)$,
(iv) $\alpha_1(l_1-1)+\alpha_k<\alpha_0<\alpha_1(l_1-1)+\alpha_{k-1}\,(2\leq k\leq r-s)$,
(v) $\alpha_1(l_1-1)+\alpha_{r-s+1}<\alpha_0<\alpha_1(l_1-1)+\alpha_{r-s}$,
(vi) $\alpha_0=\alpha_1(l_1-1)+\alpha_{r-s+1}$, (vii) $\alpha_0=\alpha_1(l_1-1)+\alpha_{r-s+k}(2\leq k\leq s)$,
(viii) $\alpha_1(l_1-1)+\alpha_{r-s+k}<\alpha_0<\alpha_1(l_1-1)+\alpha_{r-s+k-1}\,(2\leq k\leq s)$,
(ix) $\alpha_1(l_1-1)\leq\alpha_0<\alpha_1(l_1-1)+\alpha_r(l_1\geq 2)$, (x) $\alpha_0=0$.

Dans chaque cas, ξ peut être représentable finiment et aussi presque finiment par rapport à η. Mais, pour les cas (i)–(viii), nous pouvons démontrer qu'il n'y a aucune couple de ξ, η représentable presque finiment. Désormais nous passerons sans explication s'il en est ainsi.

12. Le sous-cas (i). Pour ce cas, nous pouvons poser

$$\xi=\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\varepsilon,\quad \varepsilon=\eta^{l_1-1}\omega^{\alpha_1}\lambda_1+\cdots, \tag{12.1}$$

où $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_s^2$ $(r>s)$, $\alpha_{s+1}=\bar{\alpha}$ et $\lambda_{s+1}=\lambda_1(\mu_0+1)$.

Alors, pour que ξ est représentable finiment par rapport à η, il faut et il suffit que ξ est développable comme suit

$$\begin{aligned}\xi=&\{\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\eta^{l_1-1}(\omega^{\alpha_1}\lambda_1+\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+2})\}\\&+\sum_{i=2}^{t}\{\eta^{l_i}(\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_i+\sigma+\mu_0)+\eta^{l_i-1}(\omega^{\alpha_1}\lambda_1+\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+2})\},\end{aligned} \tag{12.2}$$

où $t\geq 1$, $l_{i-1}>l_i\,(2\leq i\leq t)$, $\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+2}\leq(\eta)_{r-s}^2$, pour m et a convenablement choisis. Encore, lorsqu'on a $t\geq 2$, $l_2=l_1-1$ et $\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+2}=(\eta)_{r-s}^2$, il faut $\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_2+\sigma<(\eta)_r^{r-s+1}$ et s'il existe au moins un $i(\geq 3)$ tel que $l_i=l_{i-1}-1$,

*) S. Nagai: La solvabilité de certains équations sur les nombres ordinaux transfinis. I, II, Proc. Japan Acad., **37**, 121–126, 175–178 (1961).