49. Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. V

Par Ikuo KIMURA

Université de Kôbé

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., March 12, 1966)

Introduction. Nous avons examiné quelques propriétés des quatre sortes de pseudoconvexité, [1]~[4]. Le but principal de cette Note est d'améliorer ou de fortifier des résultats obtenus dans [1], [2], c'est-à-dire d'établir le théorème que tout domaine pseudoconvexe à une seule direction complexe est pseudoconvexe au sens ordinaire. En tant qu'une application de ce théorème, nous simplifions la condition suffisante classique, expliquée par le rayon de Hartogs, pour qu'un domaine soit pseudoconvexe. Pareillement aux Notes antérieures nous considérons toujours des domaines D univalents dans l'espace de deux variables complexes w, z.

1. Résultat principal. Avant d'étudier notre théorème nous démontrons d'abord le

Lemme 1. *Si un domaine D est pseudoconvexe par rapport à w, D est pseudoconvexe par rapport à z.*

Preuve. En vertu du théorème, [4], il suffit de montrer qu'un domaine D pseudoconvexe par rapport à w est pseudoconvexe (III) par rapport à z. Soit $z=g(w, t)$ une fonction continue sur $\{|w-w_0|\leqq R, 0\leqq t\leqq 1\}$, holomorphe en w dans un voisinage du cercle $|w-w_0|\leqq R$ pour tout t fixe. Supposons que l'on ait $(w_0, z_0)\notin D$, $z_0=g(w_0, 0)$ et que $(w, g(w, 0))\in D$ pour $0<|w-w_0|\leqq R$ et enfin que $g'(w_0, 0)\neq 0$. Alors, l'équation $z=g(w, t)$ peut être résolue dans un voisinage de $w=w_0, z=z_0$ pour t suffisamment petit, et la solution $w=f(z, t)$ est définie et continue sur l'ensemble $\{|z-z_0|\leqq r, 0\leqq t\leqq \tau\}$, holomorphe dans un voisinage du cercle $|z-z_0|\leqq r$ pour tout t fixe, où r, τ sont des nombres positifs suffisamment petits.

En effet, pour r_0 positif assez petit, on a $g(w, 0)-z_0\neq 0$ pour $0<|w-w_0|\leqq r_0$. Soient r_1, τ des nombres positifs suffisamment petits; on a $|(g(w, t)-z)-(g(w, 0)-z_0)|<m$ pour $|w-w_0|=r_0$, $|z-z_0|<r_1$ et $0\leqq t\leqq \tau$, où $m=\min.\{|g(w, 0)-z_0|\,|\,|w-w_0|=r_0\}$. Si $|z-z_0|<r_1$ et $0\leqq t\leqq\tau$, il existe un unique point $w=f(z, t)$ dans $|w-w_0|<r_0$, tel que $z=g(w, t)$. La formule

$$f(z, t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-w_0|=r_0}\frac{wg'(w, t)}{g(w, t)-z}dw$$

montre ce que nous voulons prouver. (Pour le voir, il suffit de