55. *Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà. IV*

Von Harry POPPE

Sektion Mathematik, Ernst-Moritz Arndt Universität, D. D. R.

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., April 12, 1968)

Die vorliegende Arbeit ist die Fortsetzung der Note "Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà III" aus dem gleichen Band dieser Proceedings.

Wir können nun den Nobelschen Satz (5) (bzw. die brieflich mitgeteilte Verschärfung teilweise) weitgehend verallgemeinern.

(6) Satz: Y und Z seien L-Räume, Z erfülle noch das Axiom L III und sei Hausdorffsch (d.h. Z erfüllt das Axiom LT_2 im Sinne von [8]). Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(I) Es sei lim eine Limesabbildung für $C(Y, Z)$, die größer als die Limesabbildung p-lim (siehe [8]) der punktweisen Konvergenz ist (d.h. aus der Konvergenz bezüglich lim folgt die Konvergenz bezüglich p-lim). Es sei $(C(Y, Z), \lim)$ ein L-Raum. Ist dann $H \subset C(Y, Z)$ bezüglich lim kompakt (d.h. konvergiert jeder Ultrafilter $\mathfrak{F}$ in $C(Y, Z)$ mit $H \in \mathfrak{F}$ gegen ein $f \in H$), so folgt, daß H gleichstetig ist (d.h. es gilt folgendes: ist $y \in Y$, $z \in Z$, ϕ ein Filter in Y mit $\phi \to y$ und $\mathfrak{F}$ ein Filter in $C(Y, Z)$ mit $H \in \mathfrak{F}$ und $\omega(\mathfrak{F} \times \varphi y) \to z$, so folgt $\omega(\mathfrak{F} \times \phi) \to z$[1].

(II) Für jeden L-Raum X mit der Eigenschaft, daß jeder konvergente Ultrafilter in X eine kompakte Menge enthält, gilt: Ist $\tilde{f} \in C(X, (C(Y, Z), \lim))$, so folgt $f = h^{-1}(\tilde{f}) \in C(X \times Y, Z)$. (Es ist $f(x, y) = \tilde{f}(x)(y)$).

Beweis: (I)$\Rightarrow$(II): Sei $\tilde{f} \in C(X, (C(Y, Z), \lim))$ und $f = h^{-1}(f)$; es sei $(x, y)X \in \times Y$, ϕ ein Filter in $X \times Y$ mit $\phi \to (x, y)$ und π' ein Ultrafilter in Z mit $f\phi \subset \pi'$; dann existiert ein Ultrafilter π in $X \times Y$ mit $\phi \subset \pi$ und $f\pi = \pi'$; sei $\pi_1 = pr_X\pi$ und $\pi_2 = pr_Y\pi$; dann gilt $\pi_1 \to x$ und $\pi_2 \to y$; π_1 ist konvergenter Ultrafilter in X und folglich enthält π_1 eine kompakte Menge K; dann folgt, daß $\tilde{f}(K)$ kompakt in $(C(Y, Z), \lim)$ ist und folglich ist $\tilde{f}(K)$ nach Voraussetzung gleichstetig. $\tilde{f}\pi_1$ ist ein Filter in $C(Y, Z)$ mit $\tilde{f}(K) \in \tilde{f}\pi_1$; aus $\pi_1 \to x$ folgt $\tilde{f}(x) \lim \tilde{f}\pi_1$ und damit auch $f(x)$ p-lim $\tilde{f}\pi_1$ folglich gilt $\omega(\tilde{f}\pi_1 \times \varphi y) \to \tilde{f}(x)(y) = f(x, y)$; wegen der Gleichstetigkeit von $\tilde{f}(K)$ und wegen $\pi_2 \to y$ folgt dann $\omega(\tilde{f}\pi_1 \times \pi_2) \to f(x, y)$. Wir zeigen noch, daß $\omega(\tilde{f}\pi_1 \times \pi_2) \subset f\pi = \pi'$ gilt,

---

1) In [8] wurde eine etwas stärkere Bedingung angegeben; in [9] wurde die vorliegende Bedingung als "schwache Gleichstetigkeit" bezeichnet.