106. Tauber-Konstanten für die Verfahren C_α , A_λ und L . II

Von Hubert TIETZ

Mathematisches Institut, Universität Stuttgart, Deutschland

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., June 10, 1969)

3. Tauber-Konstanten für A_λ . Dem Analogon zu Satz C_α für das Verfahren A_λ stellen wir folgenden Hilfssatz voran.

Hilfssatz 2. a) Für $\lambda > -1$ und $\nu = 1, 2, \dots$ ist

$$(3.1) \quad \binom{\nu + \lambda}{\nu - 1} \leq M(\lambda) \nu^{\lambda+1} \quad \text{mit} \quad M(\lambda) = \begin{cases} 1/\Gamma(\lambda+2) & \text{für } -1 < \lambda < 0 \\ 1 & \text{für } \lambda \geq 0. \end{cases}$$

b) Für $\lambda > -1$, $x \geq 1$ und $k \geq [(\lambda+3)x]$ ist

$$(3.2) \quad (1+x)^{-\lambda-1} \binom{k+\lambda}{k} \leq (1+x)^{-\lambda-1} \binom{k+A}{k},$$

wenn A die kleinste ganze Zahl mit $\lambda \leq A$ bezeichnet.

c) Für festes $A = 0, 1, \dots$ und festes $\nu = 0, 1, \dots$ läßt sich die Funktion

$$g_{\lambda\nu}(t) = \sum_{k=\nu}^{\infty} \binom{k+A}{k} t^k \quad \text{für } t \in (0, 1)$$

darstellen in der Form

$$(3.3) \quad g_{\lambda\nu}(t) = \sum_{\mu=0}^A \binom{\nu+A}{\nu+\mu} t^{\nu+\mu} (1-t)^{-1-\mu}.$$

Beweis. a) Für $-1 < \lambda < 0$ ist (siehe Wendel [10],*) Ungleichung (4)

$$\Gamma(\nu + \lambda + 1) \leq \nu^{\lambda+1} \Gamma(\nu) \quad \text{für } \nu = 1, 2, \dots$$

und damit

$$\binom{\nu + \lambda}{\nu - 1} = \frac{\Gamma(\nu + \lambda + 1)}{\Gamma(\nu) \Gamma(\lambda + 2)} \leq \frac{\nu^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda + 2)}.$$

Für $\lambda \geq 0$ und $\nu = 1$ gilt (3.1) mit $M(\lambda) \equiv 1$. Es sei (3.1) im Fall $\lambda \geq 0$ für $\nu = 1, 2, \dots, k-1$ mit $M(\lambda) \equiv 1$ bewiesen. Dann ist für $\nu = k$

$$\binom{k+\lambda}{k-1} = \frac{k+\lambda}{k-1} \binom{k-1+\lambda}{k-2} \leq \frac{k+\lambda}{k-1} (k-1)^{\lambda+1} = \frac{k+\lambda}{k} \frac{(k-1)^\lambda}{k^\lambda} k^{\lambda+1} \leq k^{\lambda+1},$$

denn $\frac{k+\lambda}{k} \left(\frac{k-1}{k}\right)^\lambda$ fällt monoton mit wachsendem λ . Also gilt (3.1) auch für $\lambda \geq 0$.

b) Mit $f(\lambda) = (1+x)^{-\lambda-1} \binom{k+\lambda}{k}$ erhalten wir

$$f'(\lambda) = \frac{\Gamma(k+\lambda+1)}{(1+x)^{1+\lambda} \Gamma(k+1) \Gamma(\lambda+1)} [\psi(k+\lambda+1) - \psi(\lambda+1) - \log(1+x)].$$

*) Vgl. die Literatur am Ende der ersten Arbeit.