67. *Zur Algebra der Logik.*

By Sigekatu KURODA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Rec. and Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1930.)

Wir betrachten ein System von Elementen, welches die zwei Kompositionsgesetze, Addition und Multiplikation, gestattet und welches die folgenden vier Postulate erfüllt:

I. Summe und Produkt zweier Elemente sind eindeutig bestimmt in diesem Systeme.

II. Für beliebige Elemente gilt:

$$A+B=B+A, \qquad AB=BA,$$
$$A+(B+C)=(A+B)+C, \qquad A(BC)=(AB)C,$$
$$A(B+C)=AB+AC, \qquad A+BC=(A+B)(A+C).$$

III. Es gibt die Elemente E_0 und E_1, die Additions- und die Multiplikationseinheit, von der Art, dass für beliebiges A gilt:

$$E_0+A=A, \qquad E_1A=A.$$

IV. Zu jedem Elemente A gibt es ein inverses Element A^{-1}, derart, dass

$$A+A^{-1}=E_1 \qquad \text{und} \qquad AA^{-1}=E_0.$$

Aus diesen Postulaten folgt das Dualitätsprinzip:

Ein richtiger Satz bleibt richtig, wenn Addition und Multiplikation miteinander vertauscht werden.

Satz 1: Die Einheiten sind eindeutig.

Beweis: Ist $E_0+A=A$ und $E_0'+A=A$, so folgt $E_0+E_0'=E_0=E_0'$.

Satz 2: Das inverse Element ist eindeutig.

Beweis: Ist $A+A'=E_1$, $AA'=E_0$ und auch $A+A''=E_1$, $AA''=E_0$, so ist $A'=(A+A'')A'=AA'+A''A'=A''A'$ und ähnlicherweise $A''=A''A'$, woraus folgt $A'=A''$.

Satz 3: $(A^{-1})^{-1}=A$.

Beweis: Wegen Kommutativität folgt unmittelbar aus IV.

Satz 4: $E_1+A=E_1$, $E_0A=E_0$.

Beweis: $E_1+A=(E_1+A)(A+A^{-1})=A+E_1A^{-1}=A+A^{-1}=E_1$.

Satz 5: $A+A=A$, $AA=A$.

Beweis: Aus Satz 4 folgt $E_1=E_1+E_1$, also $AE_1+AE_1=A(E_1+E_1)=AE_1$, d.h. $A+A=A$.