PAPERS COMMUNICATED

66. *Gruppentheoretischer Beweis des Äquivalenz- und Enthaltenseinsatzes in der Theorie der Matrizen mit ganzen Koeffizienten.*

Von Kenjiro SHODA.

(Rec. and Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1930.)

Die Beziehung zwischen den Abelschen Gruppen und den ganzzahligen Matrizen haben zuerst Frobenius und Stickelberger[1] entdeckt. In der vorliegenden Arbeit werde ich diese Beziehung zum Beweis des bekannten Aquivalenz- und Enthaltenseinsatzes von Frobenius[2] anwenden. Wenn man statt Abelsche Gruppen die Krullschen Elementarteilergruppen[3] betrachtet, so erhält man ganz analog die Beweise der beiden Fundamentalsätze über Matrizen, deren Koeffizienten Polynome einer Veründlichen in einem beliebigen Körper sind.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine unendliche Abelsche Gruppe, die durch endlich viele Elemente erzeugt wird. Dann ist $\mathfrak{A}$ nach Herrn A. Prüfer[4] das direkte Produkt einer endlichen Gruppe $\mathfrak{A}_e$ und einer reinen unendlichen Gruppe $\mathfrak{A}_u$. Unter die Invarianten von $\mathfrak{A}$ verstehen wir $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k, 0, 0, \ldots\ldots, 0)$, wenn $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k)$ die Invarianten von $\mathfrak{A}_e$ ist.

Sind A, B zwei ganzzahlige Matrizen und gibt es zwei quadratische ganzzahlige Matrizen P, Q, die der Gleichung $PAQ=B$ genügen, so heisst A unter B *enthalten*. Zwei gegenseitig unter der anderen ethaltene Matrizen heissen miteinander *äquivalent*. Der Frobeniussche Äquivalenzsatz lautet: *Zwei ganzzahlige Matrizen von demselben Typus sind dann und nur dann miteinander äquivalent, wenn sie dieselben Elementarteiler besitzen.*

Ist nun $PAQ=B$, so ist jede λ-ten Unterdeterminante von B eine lineare Funktion der von A, also ist der grösste gemeinsamer Teiler

---

1) Frobenius-Stickelberger: Über Gruppen mit vertauschbaren Elementen, Crelle's Journal, 86.

2) Frobenius: Theorie der linearen Formen mit ganzen Koeffizienten, Crelle's Journal, 86 und 88.

3) Krull: Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. der Wiss. 1926. Wenn man dabei die Existenz des Ordnungspolynoms nicht voraussetzt, so erhält man die Definition der unendlichen Elementarteilergruppe.

4) Prüfer: Theorie der Abelschen Gruppen, Math. Zeitschr. 20.