

10. Über die Primitivität einer auflösbaren Permutationsgruppe.

By Kiyosi TAKETA.

Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Rec. Feb. 10, 1931. Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Feb. 12, 1931.)

Jede transitive Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$, die einen intransitiven Normalteiler hat, ist bekanntlich imprimitiv. Ist aber die Gruppe auflösbar und wenn ihr minimaler Normalteiler $\mathfrak{N}$ transitiv, so ist $\mathfrak{G}$ primitiv, so dass wir sagen können:

Die transitive auflösbare Permutationsgruppe ist primitiv oder imprimitiv, je nachdem ihr minimaler Normalteiler transitiv ist oder nicht.

Beweis: Bedeuten $\mathfrak{G}, \mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_{i-1}, \dots, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_0, \mathfrak{E}$ eine Hauptreihe von $\mathfrak{G}$, so ist jede Faktorgruppe vom Typus $(p, p, \dots, p)$, wo p eine Primzahl ist. Also ist $\mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_0$ erzeugt durch die Elemente $P_1, P_2, \dots$, deren p -te Potenzen alle zu $\mathfrak{N}_0$ gehören, wobei wir annehmen können, dass alle diese P die Variable x_1 nicht ändern; denn führt $P_i x_1$ in x_2 über, dann wählen wir ein Element N_0 von $\mathfrak{N}_0$, das x_2 in x_1 überführt, was immer möglich ist, weil nach Voraussetzung $\mathfrak{N}_0$ transitiv ist, und wir ersetzen P_i durch $P_i N_0$. In gleicher Weise lässt sich $\mathfrak{N}_2/\mathfrak{N}_1$ durch die Elemente $P'_1, P'_2, \dots$ erzeugen, die x_1 nicht ändern und deren p -te Potenzen zu $\mathfrak{N}_1$ gehören.

Durch die Fortsetzung dieser Behandlung können wir beweisen, dass alle Elemente von $\mathfrak{G}$ sich in der Gestalt

$$(1) \quad P_a P_b \dots P_k^{(j)} P_l^{(j)} \dots P_i^{(i)} N_0$$

darstellen lassen. Fassen wir nun alle Elemente von $\mathfrak{G}$ zusammen, welche x_1 in sich überführen, dann bilden sie eine echte Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, und es genügt, wenn wir beweisen, dass $\mathfrak{H}$ die grösste Untergruppe ist, denn dann wird $\mathfrak{G}$ imprimitiv.¹⁾ Wäre $\mathfrak{H}$ nicht die grösste Untergruppe von $\mathfrak{G}$, und gäbe es eine Gruppe $\mathfrak{G}^*$ der Art, dass $\mathfrak{G} > \mathfrak{G}^* > \mathfrak{H}$, dann sei $\mathfrak{G}^* = P_1^* P_2^* \dots P_k^{(j)*} P_l^{(j)*} \dots P_i^{(i)*} N_0^*$ ein Element von $\mathfrak{G}^*$, das nicht in $\mathfrak{H}$ enthalten ist. Da $P_1, P_2, \dots, P_k^{(j)}, P_l^{(j)}, \dots, P_i^{(i)}$ alle zu $\mathfrak{H}$ gehören, so muss N_0^* , folglich auch $P^{(i)-1} N_0^* P^{(i)}$ zu $\mathfrak{G}^*$ gehören. Diese erzeugen zusammen mit N_0^* ,

1) Vgl. A. Speiser: Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin (1923), 71.