135. *Über eine Eigenschaft der hyperkommutativen Gruppe.*

Von Masatada TAZAWA.
Mathematisches Institut, Tohoku Kaiserliche Universität, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Nov. 13, 1933.)

Eine Gruppe, in der alle Elemente bei Multiplikation kommutativ sind, heisst Abelsche Gruppe. Die Abelsche Gruppe stimmt also mit ihrem Zentrum überein. Von diesem Standpunkt aus können wir den Begriff der Abelschen Gruppe verallgemeinern. Ist $\mathfrak{Z}_1$ das Zentrum der Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{Z}_1$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Wenn $\mathfrak{Z}_1$ mit $\mathfrak{G}$ übereinstimmt, so ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ Abelsch. Im sonstigen Falle wollen wir das Zentrum der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1$ mit $\mathfrak{Z}_2/\mathfrak{Z}_1$ bezeichnen. Wenn $\mathfrak{Z}_2$ mit $\mathfrak{G}$ nicht übereinstimmt, denken wir uns ferner das Zentrum der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_2$. Mit diesem Prozess erhalten wir eine Kette von Normalteilern von $\mathfrak{G}$; nämlich

$$\mathfrak{Z}_1 \subset \mathfrak{Z}_2 \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{Z}_n \subset \cdots\cdots,$$

wo $\mathfrak{Z}_n/\mathfrak{Z}_{n-1}$ das Zentrum der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_{n-1}$ ist. Diese Kette bricht nach endlichen Gliedern ab. Der letzte Normalteiler in der obigen Kette heisst Hyperzentrum von der Gruppe $\mathfrak{G}$, und eine Gruppe, die mit ihrem Hyperzentrum übereinstimmt, heisst hyperkommutative Gruppe. Also ist die hyperkommutative Gruppe eine Verallgemeinerung der Abelschen Gruppe.

Hat die hyperkommutative Gruppe analoge Eigenschaften mit der Abelschen Gruppe? Eine Abelsche Gruppe von der Ordnung n besitzt bekanntlich einen Normalteiler von der Ordnung d, wo d ein beliebiger Teiler von n ist. Im Folgenden wollen wir beweisen, dass diese Tatsache auch bei der hyperkommutativen Gruppe gilt. Ferner können wir zeigen, dass die Umkehrung auch richtig ist; wenn nämlich eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Ordnung n einen Normalteiler von der Ordnung d besitzt, wo d ein beliebiger Teiler von n ist, so ist $\mathfrak{G}$ eine hyperkommutative Gruppe. Also gilt der folgende

Satz. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dass eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Ordnung n einen Normalteiler mit einem beliebigen Teiler d von n als ihre Ordnung besitze, ist, dass $\mathfrak{G}$ eine hyperkommutative Gruppe ist.

Den ersten Teil dieses Satzes könnte man mit Hilfe des Burnside-