# 38. *Ein Beweis für Szegösche Vermutung über schlichte Potenzreihen.*

Von Kenzo JOH und Shin-ichi TAKAHASHI.
Technische Fakultät, Mathematisches Institut, Osaka Kaiserliche Universität.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Mar. 12, 1934.)

Es bedeute $S_k$ die Klasse aller in $|x|<1$ regulären, schlichten, normierten und $k$-fach symmetrischen Funktionen

$$f_k(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu k+1}^{(k)} x^{\nu k+1}, \qquad a_1^{(k)}=1\,;\quad k=1, 2, \ldots\ldots$$

Bekanntlich ist

$$|a_n^{(1)}|<en \qquad \text{d.h.}\quad a_n^{(1)}=O(n)\,[1]$$

und

$$|a_n^{(2)}|<A\,[2] \quad (A: \text{Absolute Konstante}) \quad \text{d.h.}\quad a_n^{(2)}=O(1).\,[3]$$

Für die allgemeine Klasse $S_k$ hat Herr Szegö die Vermutung

$$a_n^{(k)}=O(n^{-1+\frac{2}{k}}) \qquad k=1, 2, \ldots\ldots$$

ausgesprochen.

Herr K. K. Chen[4] hat neulich bewiesen, dass $|a_n^{(2)}|<e^2$, $|a_n^{(3)}|<e^3 n^{-\frac{1}{3}}$. Ferner hat Herr Levin kürzlich die folgenden Resultaten gewonnen. Es existieren drei absolute Konstanten $B$, $C$ und $D$, so dass für $k\geqq 2$

1. $|a_n^{(3)}|\leqq Bn^{-\frac{1}{3}}$,
2. $|a_n^{(4)}|\leqq Cn^{-\frac{1}{2}}\log n$,
3. $|a_n^{(k)}|\leqq Dn^{-\frac{1}{2}}\log^{\frac{1}{2}} n$ für $k\geqq 5$

gilt ($D$ ist also von $k$ unabhängig). So ist die Szegösche Vermutung bis heute nur für $k=1, 2, 3$ bewiesen.

Wir können aber beweisen dass die Szegösche Vermutung für alle $k$ doch gültig ist, nämlich wir haben den folgenden

---

1) Takahashi hat inzwischen die Richtigkeit der Ungleichung $\limsup_{n=\infty}\frac{|a_n|}{n}\leqq 2$ gezeigt. Proc. **9** (1933), 462-464.

2) Littlewood u. Paley: Journ. London Math. Soc., **7** (1932), 167-169; Landau: Math. Zeits., **37** (1933), 465-467.

3) Levin: Math. Zeits., **38** (1933), 465-467. Levin hat bemerkt in seiner Arbeit dass für $A$ den Wert $2^{\frac{1}{4}}3^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}}=3.39\ldots\ldots$ genommen werden kann.

4) K. K. Chen: Proc. **9** (1933), 465-467.