109. Über die monomial darstellbaren endlichen Substitutionsgruppen.

Von Masatada TAZAWA.
Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., July 12, 1934.)

Über die monomiale Darstellung ist der folgende Satz bekannt.

Satz: Substitutionsgruppen, deren Ordnung ein Produkt von lauter verschiedenen Primzahlen ist, lassen sich stets auf monomialem Gestalt transformieren.

Im Folgenden wollen wir bemerken, dass die Verallgemeinerung des obigen Satzes in ganz analoger Weise bewiesen wird.

Satz. Die Ordnung einer Substitutionsgruppe $\mathfrak{H}$ sei $h=p^{\alpha}q^{\beta}\ldots\ldots r^{\lambda}s^{\sigma}$, wo $p<q<\cdots\cdots<r<s$ ist. Seien alle Sylowsche Untergruppen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, ……, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ von der Ordnungen p^{α}, q^{β}, ……, r^{λ}, s^{σ} Abelsch. Wenn $\theta(\mathfrak{P})$ und h/p^{α}, $\theta(\mathfrak{Q})$ und $h/p^{\alpha}q^{\beta}$, …… relativ prim sind, so lässt sich die Substitutionsgruppe auf monomialem Gestalt transformieren. Dabei bezeichnet $\theta(\mathfrak{P})$ die Zahl $(p-1)(p^2-1)\ldots\ldots$, $(p^{\rho}-1)$, wo ρ die Anzahl der Basis der Abelschen Gruppe ist.

Um diesen Satz zu beweisen wollen wir die folgenden zwei Hilfssätze benutzen.

Hilfssatz 1. Die Ordnung einer Gruppe $\mathfrak{H}$ sei $h=ab$, wo a und b relativ prim sind. Sei

$$a=p^{\alpha}q^{\beta}\ldots\ldots r^{\lambda}s^{\sigma}\,,$$

wo $p, q, \ldots\ldots, r$ verschiedene Primzahlen sind. Wenn alle Sylowsche Untergruppen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \ldots\ldots, \mathfrak{R}$ von der Ordnungen p^{α}, q^{β}, ……, r^{λ} Abelsch sind, und wenn $\theta(\mathfrak{P})$ und h/p^{α}, $\theta(\mathfrak{Q})$ und $h/p^{\alpha}q^{\beta}$, …… relativ prim sind, so enthält $\mathfrak{H}$ genau b Elemente, deren Ordnung in b aufgeht.[1]

Hilfssatz 2. Sei $\mathfrak{H}$ eine Substitutionsgruppe mit einem Abelschen Normalteiler $\mathfrak{A}$, der nicht zum Zentrum gehört. Wenn $\mathfrak{A}$ vollständig reduziert so ist $\mathfrak{A}$ intransitiv oder imprimitiv.[2]

Beweis des Satzes.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Substitutionsgruppe $\mathfrak{H}$ irreduzible ist.

---

1) Frobenius: Über auflösbare Gruppe II, Berliner Sitzungsber., 1895.
2) Speiser: Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, S. 192.