

67. Ein Satz über Schlichtheit von einer meromorphen Funktion.

Von Tokui SATO.

Mathematisches Institut, Hokkaido Kaiserliche Universität zu Sapporo.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., June 12, 1935.)

Es sei D ein konvexer Bereich, der den Punkt $z=0$ enthält, und eine Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots \equiv \frac{1}{z} + g(z)$$

sei regulär bis auf den $z=0$, und

$$\operatorname{Re}^{i\theta} g'(z) > \frac{1}{\rho^2} \quad (\theta : \text{reelle Konstante})$$

in D .

Dann ist $f(z)$ schlicht in dem Teile T , der die Menge derjenigen Punkte z ist, die zum D gehören und deren absoluter Beträge $|z|$ grösser als ρ sind.

Beweis.

Der Einfachheit halber setzen wir voraus, $\theta=0$, was die Allgemeinheit nicht beschränkt.

Es seien z_1 und z_2 ($z_1 \neq z_2$) zwei beliebige Punkte in T . Da D konvex ist und $g(z) = f(z) - \frac{1}{z}$ regulär in D , liegt die Strecke $\overline{z_1 z_2}$ in D und können wir $g'(z)$ auf $\overline{z_1 z_2}$ integrieren. Also haben wir

$$\begin{aligned} f(z_2) - f(z_1) &= \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} + \left(f(z_2) - \frac{1}{z_2} \right) - \left(f(z_1) - \frac{1}{z_1} \right) \\ &= \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} + \int_{z_1}^{z_2} g'(z) dz \\ &= \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2} - a(z_1 - z_2) + \int_{z_1}^{z_2} (g'(z) - a) dz \\ &\qquad\qquad\qquad \left(a : \text{Konstante} > \frac{1}{\rho^2} \right) \end{aligned}$$

Da $w = g'(z) - \frac{1}{\rho^2}$ regulär und $\operatorname{Re} \left(g'(z) - \frac{1}{\rho^2} \right) > 0$ in D ist, so ist die Bildkurve C von der Strecke $\overline{z_1 z_2}$ beschränkt und abgeschlossen, und liegt ganz in der Halbebene $\operatorname{Re} w > 0$. Folglich können wir einen Kreis

$$\left| w - \left(a - \frac{1}{\rho^2} \right) \right| = r$$

schreiben, der in der Halbebene $\operatorname{Re} w > 0$ liegt und C enthält. Es ergibt sich also

$$r < a - \frac{1}{\rho^2}.$$

Daraus haben wir