103. *Sur les points singuliers des équations différentielles ordinaires du premier ordre, I.*

Par Masuo HUKUHARA.

Institut mathématique de l'université de Hokkaido.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1935.)

1. Supposons la variable x réelle et y complexe, et considérons l'équation différentielle

$$x\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1}$$

où la fonction $f(x,y)$ est développable en une série convergente dans $0<x<\delta$, $|y|<mx^{-\lambda}(\lambda>0)$:

$$f(x,y)=a_0(x)+a_1(x)y+\cdots\cdots+a_n(x)y^n+\cdots\cdots, \tag{2}$$

la convergence devient uniforme si on multiplie chaque terme par x^λ et les $a_n(x)$ sont des fonctions continues dans $0<x<\delta$ et développables asymptotiquement comme il suit:

$$\begin{gathered} a_n(x)\sim a_n^{(0)}+a_n^{(1)}x+\cdots\cdots+a_n^{(j)}x^j+\cdots\cdots \\ (a_0^{(0)}=\rho\neq 0,\ a_1^{(0)}=0,\ a_n^{(j)}=0 \quad \text{pour} \quad j<(n-1)\lambda)\,. \end{gathered} \tag{3}$$

On forme d'abord une série qui satisfait formellement à l'équation donnée (1):

$$y\sim\sum_{j=0}^{\infty}a_j(\rho\log x+C)x^j\,, \tag{4}$$

$a_j(u)$ étant des polynomes en u de degré $j+1$. Posons

$$y=P(x,C)+z$$

$$P(x,C)=a_0(\rho\log x+C)+\cdots\cdots+a_j(\rho\log x+C)x^j$$

et appliquons les théorèmes d'existence et d'unicité des intégrales à l'équation transformée:

$$x\frac{dz}{dx}=g(x,z)\,. \tag{5}$$

On verra sans peine que cette équation admet une solution et une seule telle que $\lim\limits_{x\to+0}x^{-j}z(x)=0$. On peut en conclure que *quelle que soit la valeur de la constante C, l'équation (1) admet une solution et une seule développable asymptotiquement en série (4).*

2. On peut aller plus loin. En effet, il est facile de voir que $g(x,z)$ peut se développer en une série convergente dans $0<x<\delta_1$, $|z|<m_1x^{-\lambda}$:

$$g(x,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(x,C)z^k\,,$$

la convergence devenant uniforme si on multiplie chaque terme par x^λ et les coefficients $\beta_k(x,C)$ étant développables asymptotiquement comme il suit: