PAPERS COMMUNICATED

101. *Über die Algebren über einem Körper von der Primzahlcharakteristik.*

Von Tadasi NAKAYAMA.
Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität zu Osaka.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 12, 1935.)

Es sei K ein Körper von der Primzahlcharakteristik p und $\mathfrak{A}$ eine normale einfache Algebra über K, deren Index *eine Potenz von* p ist. Wir beweisen

1. *$\mathfrak{A}$ besitzt stets Zerfällungskörper endlichen Grades, der vollständig zweiter Art über K ist.* Insbesondere: 1′. *Ist K vollkommen, so muss $\mathfrak{A}\sim K$ sein.*[1]

2. *Ist der Grad $(K^{p^{-1}}:K)$ von $K^{p^{-1}}$ über K endlich und zwar gleich p^n, so ist die n-te Potenz des Exponenten von $\mathfrak{A}$ durch ihren Index teilbar, wo $K^{p^{-i}}$ nach Steinitz*[2] *den Körper bedeutet, der aus den p^i-ten Wurzeln aller Elemente von K besteht.*

3. *Ist $(K^{p^{-1}}:K)=p$, so ist der Exponent von $\mathfrak{A}$ gleich ihrem Index und die zu $\mathfrak{A}$ ähnliche Divisionsalgebra besitzt einen maximalen Unterkörper, der vollständig von zweiter Art über K ist.*

Beweis: Es gibt nach Albert, Köthe, Noether, Zorn[3] einen galoisschen Zerfällungskörper L erster Art von $\mathfrak{A}$. Dann lässt sich die Algebrenklasse von $\mathfrak{A}$ als ein verschränktes Produkt darstellen:

$$\mathfrak{A}\sim(a_{R,S},L/K,\mathfrak{G}),$$

wo $\mathfrak{G}$ die galoissche Gruppe von L/K bedeutet.

Es gilt nun $L\cap K^{p^{-1}}=K$, da $K^{p^{-1}}/K$ keinen separablen Zwischenkörper besitzt. Es ist also $(LK^{p^{-1}}:K^{p^{-1}})=(L:K)$ und man kann $\mathfrak{G}$ als die galoissche Gruppe von $LK^{p^{-1}}/K^{p^{-1}}$ betrachten. In diesem Sinne gilt bekanntlich

$$\mathfrak{A}_{K^{p^{-1}}}\sim(a_{R,S},LK^{p^{-1}}/K^{p^{-1}},\mathfrak{G}).$$

Hier ist aber $LK^{p^{-1}}=L^{p^{-1}}$. Denn, wenn man zu jedem Element z von L seine (eindeutig bestimmte) p-te Wurzel zuordnet, so erhält man einen Isomorphismus von L mit $L^{p^{-1}}$, und dabei entspricht K zu $K^{p^{-1}}$. Also ist $(L^{p^{-1}}:K^{p^{-1}})=(L:K)$. Da aber $(L:K)=(LK^{p^{-1}}:K^{p^{-1}})$ ist, so muss $L^{p^{-1}}=LK^{p^{-1}}$ sein, da $L\subseteqq L^{p^{-1}}$ und $K^{p^{-1}}\subseteqq L^{p^{-1}}$, also $LK^{p^{-1}}\subseteqq L^{p^{-1}}$ ist. Daher gilt

---

1) 1′ findet sich schon in A. Albert: Normal division algebras over a modular field, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), S. 388–394.

2) E. Steinitz: Algebraische Theorie der Körper, Journal für Math. **137** (1910), S. 167–309.

3) G. Köthe: Über Schiefkörper mit Unterkörpern zweiter Art über dem Zentrum, Journal für Math. **166** (1932), S. 182–184; E. Noether: Nichtkommutative Algebra, Math. Zeits. **37** (1933), S. 514–541; A. Albert, a. a. O.