# 119. *Applications des espaces à une infinité de dimensions à la théorie des ensembles.*

Par Kinjirô KUNUGUI.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Nov. 12, 1935.)

En se servant des espaces à une infinité de dimensions nous pouvons souvent simplifier des résultats ou des démonstrations dans la théorie des ensembles. Voici quelques exemples.

1.—M. F. Hausdorff a donné un théorème sur le complétement d'un espace métrique, qui peut s'exprimer comme il suit:

*Chaque espace métrique $R$ est isométrique à un sous-ensemble d'un espace complet.*

La démonstration de M. F. Hausdorff est une généralisation du fameux procédé de Cantor-Méray de la définition des nombres irrationnels. Or, nous allons le démontrer en se plaçant au point de vue de l'application des espaces à une infinité de dimensions; notre méthode pourra être dite fréchetienne.[1]

Démonstration. À chaque point $\xi$ de $R$, correspondons une coordonnée $x_\xi$: $-\infty < x_\xi < +\infty$, et construisons un espace $E_R$ dont les points $p$ seront désignés par $\{x_\xi\}$.

$E_R$ est un espace linéaire, et la distance entre deux points de $E_R$ sera définie au moyen de la longueur: $|p| = \sup_\xi |x_\xi|$.

On sait que $E_R$ est un espace métrique complet.[2] Or, je dis que l'espace $R$ est isométrique à un sous-ensemble de $E_R$. Pour cela, correspondons chaque point $\alpha$ de $R$ à un point $\{x_\xi(\alpha)\}$ de $E_R$, qui est déterminé par la formule: $x_\xi(\alpha) = \rho(\alpha, \xi) - \rho(\xi, O)$, où $O$ désigne un point arbitraire et fixe de $R$, et $\rho(\alpha, \beta)$ la distance entre les points $\alpha$ et $\beta$ de $R$. D'après l'axiome de la distance, on a évidemment $|x_\xi(\alpha)| \leq \rho(\alpha, O)$; d'ou, $\{x_\xi(\alpha)\}$ est un point de $E_R$. Soient $X = \{x_\xi\}$ et $Y = \{y_\xi\}$ deux points de $R$ correspondants à $\alpha$ et à $\beta$ de $R$ respectivement. Nous avons d'une part $\rho(X, Y) = \sup_\xi |\rho(\alpha, \xi) - \rho(\beta, \xi)| \leq \rho(\alpha, \beta)$; et d'autre part, en posant $\xi = \beta$, $\rho(X, Y) \geqq \rho(\alpha, \beta)$. C. Q. F. D.

Désignons par $A$ l'image isométrique de $R$ dans $E_R$. La fermeture $\bar{A}$ de $A$ est un espace complet où $A$ est un sous-ensemble dense.

2.—M. Baire a trouvé un exemple très élégant des ensembles de nombres réels qui sont précisément de classe 3.[3] Appelons *points rationnels* tous les points d'un espace cartésien à $n$ dimensions ($n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$) ou d'un espace hilbertien, dont toutes les coordonnées sont rationnelles. Nous savons que tous les points rationnels de l'espace cartésien à un nombre fini de dimensions forment un ensemble exactement de classe 2. Or, nous allons montrer que l'ensemble de tous les points rationnels de l'espace hilbertien est précisément de classe 3.

1) Voir M. Fréchet: "Les ensembles abstraits et le calcul fonctionel," Rend. Circ. Mat. Palermo, t. XXX (1910), p. 12; "Les dimensions d'un ensemble abstrait," Math. Ann. Bd. LXVIII (1910), p. 161.

2) Voir p. ex. F. Hausdorff: "Mengenlehre," 1927, p. 101 et 105.

3) Voir p. ex. N. Lusin: "Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications." 1930. p. 92.