118. *Sur l'unicite de la solution d'un système d'équations differentielles ordinaires.*

Par Masuo HUKUHARA.
Institut de mathématiques, l'université de Hokkaidô, Sapporo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Nov. 12, 1935.)

1. Soit donné un système d'équations différentielles

$$\frac{dz_j}{dx}=g_j(x, z_1, \ldots\ldots, z_n) \qquad (j=1, 2, \ldots\ldots, n), \tag{1}$$

dont les seconds membres sont des fonctions continues dans le domaine

$$0 \leqq x \leqq a, \quad |z_1| \leqq hx, \quad \ldots\ldots, \quad |z_n| \leqq hx \tag{2}$$

et s'annulant pour $z_1=\cdots\cdots=z_n=0$. Considérons, d'autre part, n fonctions $\varphi_j(x, z_1, \ldots\ldots, z_n)$ $(j=1, 2, \ldots\ldots, n)$ satisfaisant aux conditions suivantes.

(A) Elles sont continues dans le domaine (2) et admettent les dérivées partielles du premier ordre.

(B) Elles s'annulent pour $z_1=\cdots\cdots=z_n=0$, et inversement $\varphi_1=\cdots\cdots=\varphi_n=0$ entraînent $z_1=\cdots\cdots=z_n=0$.

(C) On a

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial \varphi_j^2}{\partial x}+\sum_{k=1}^{n} g_k \frac{\partial \varphi_j^2}{\partial z_k}\right\} \leqq 0 \tag{3}$$

dans le domaine (2).

Si l'on porte dans $\sum \varphi_j^2$ une solution quelconque de (1), on obtient, d'après (C), une fonction décroissante de x. Si donc $z_j=z_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots\ldots, n)$ est une solution de (1) s'annulant pour $x \to +0$ et continue dans $0 \leqq x \leqq \delta$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j\big(x, z(x)\big)^2 \leqq \sum_{j=1}^{n} \varphi_j\big(x_0, z(x_0)\big)^2 \quad \text{pour} \quad x_0 \leqq x \leqq \delta .$$

En faisant $x_0 \to +0$, on obtient, d'après (A) et (B),

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j\big(x, z(x)\big)^2=0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqq x \leqq \delta ,$$

ce qui entraîne d'après (B), $z_j(x)=0$ $(j=1, 2, \ldots\ldots, n)$ pour $0 \leqq x \leqq \delta$. Par conséquent,[1] *s'il existe n fonctions $\varphi_j(x, z)$ satisfaisant aux conditions (A), (B) et (C), le système différentiel* (1) *n'admet pas de solution non identiquement nulle et s'annulant pour $x \to +0$.*

2. Considérons ensuite le système différentiel

$$\frac{dy_j}{dx}=f_j(x, y_1, \ldots\ldots, y_n) \qquad (j=1, 2, \ldots\ldots, n), \tag{4}$$

---

1) Dans le cas de $n=1$, cette condition suffisante d'unicité est en même temps nécessaire. Voir H. Okamura: Sur l'unicité de la solution de $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ (Mem. Col. Sc., Kyoto Imp. Univ. Ser. A, 1934).