66. *Divisionsalgebren über einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers.*

Von Mikao MORIYA.

Mathematisches Institut, Hokkaido Kaiserliche Universität, Sapporo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., July 13, 1936.)

Es sei k ein unendlicher algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k. Wir bezeichnen dann mit $\bar{k}$ den derivierten Körper von k in bezug auf die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Bewertung.[1] Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{k}$ den in $\bar{k}$ enthaltenen maximalen algebraischen Erweiterungskörper über dem p-adischen Zahlkörper $\bar{k}_0$,[2] wobei p die durch $\mathfrak{p}$ teilbare Primzahl bedeutet. Da $\mathfrak{k}$ als der Vereinigungskörper von höchstens abzählbar unendlich vielen algebraischen Erweiterungkörpern endlichen Grades über $\bar{k}_0$ definiert ist, so kann man nach Herbrand als den absoluten Grad von $\mathfrak{k}$ über $\bar{k}_0$ eine Steinitzsche G-Zahl dem Körper $\mathfrak{k}$ zuordnen. Den Körper $\mathfrak{k}$ nenne ich im folgenden den Hilfskörper von $\bar{k}$. Es fragt sich nun, *ob es überhaupt eine Divisionsalgebra über $\bar{k}$*[3] *gibt, deren Index eine gegebene natürliche Zahl ist.*

Für die Untersuchung der obigen Frage will ich zuerst einen Satz[4] vorausschicken:

Satz 1. *Geht der Grad eines endlichen Abelschen Erweiterungskörpers $\bar{K}$ über $\bar{k}$ im unendlichen Bestandteile des absoluten Grades von $\mathfrak{k}$ auf, so ist jedes Element aus $\bar{k}$ Norm eines Elementes aus $\bar{K}$.*

Bekanntlich ist jede Divisionsalgebra von endlichem Index über $\bar{k}$ als ein direktes Produkt von endlich vielen Divisionsalgebren über $\bar{k}$, deren Indizes alle Primzahlpotenzen sind, darstellbar. Ich beweise nun

Satz 2. *Ist q eine Primzahl, welche im unendlichen Bestandteile des absoluten Grades von $\mathfrak{k}$ aufgeht, so existieren keine zyklischen Algebren über $\bar{k}$, deren Indizes Potenzen von q sind.*

Beweis. Ist $(\alpha, \bar{Z}, S)$ eine zyklische Algebra vom Grade q^a $(a>0)$ über $\bar{k}$, so ist $\bar{Z}$ ein zyklischer Körper vom Grade q^a über $\bar{k}$. Nach Satz 1 ist aber α Norm eines Elementes aus $\bar{Z}$, ist also wie bekannt

$$(\alpha, \bar{Z}, S) \sim \bar{k}\,.$$

Satz 3. *Es sei q wieder eine Primzahl wie in Satz 2. Dann existieren keine Divisionsalgebren über $\bar{k}$, deren Indizes Potenzen von q sind.*

Beweis. D sei eine Divisionsalgebra vom Index $q^e(>1)$ über $\bar{k}$. Dann existiert zu D ein galoisscher Zerfällungskörper $\bar{K}$ von Grade n über

1) M. Moriya, Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades, Journ. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., **3** (1935).

2), 4) M. Moriya, Klassenkörpertheorie im Kleinen für die unendlichen algebraischen Zahlkörper. Diese Arbeit erscheint demnächst im Journ. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ. **5**.

3) Unter einer Divisionsalgebra über $\bar{k}$ versteht man eine normale Divisionsalgebra mit $\bar{k}$ als Zentrum.