PAPERS COMMUNICATED

74. *Die Geometrie des Integrals* $\int (A_i x''^i + B)^{\frac{1}{p}} dt$.

Von Akitsugu KAWAGUCHI.
Geometrisches Seminar der Hokkaido Kaiserlichen Universität, Sapporo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1936.)

1. Neuerdings hat E. Cartan[1] die Invariantentheorie des Integrals $\int F(x, y, y', y'')\,dx$ gegenüber der Gruppe aller Berührungstransformationen begründet, welche von H. Hombu zu derselben des Integrals $\int F(x, y, y', y'', y''')\,dx$ erweitert worden ist.[2] Diese Theorie ist nichts anderes als die Geometrie im zwei-dimensionalen Raume mit der allgemeinen Metrik $s=\int F dx$, aber wegen ihrer eingeschränkten Methode kann man sie, wie sie steht, zum mehr-dimensionalen Raume nicht verallgemeinern. In der vorliegenden Arbeit möchte ich mich vom anderen Standpunkte aus mit der Geometrie im n-dimensionalen Raume mit der Metrik $s=\int (A_i x''^i + B)^{\frac{1}{p}} dt$ beschäftigen, indem man die Gruppe aller Punkttransformationen zu Grund legt und die verschiedenen Übertragungen sich als Grundbegriffe einführen. A_i und B sind dabei differenzierbare Funktionen von x^i sowie x'^i, und wir setzen $x'^i = \frac{dx^i}{dt}$, $x''^i = \frac{d^2x^i}{dt^2}$ für eine beliebige Kurve $x^i = x^i(t)$, deren Länge durch das Integral $s=\int (A_i x''^i + B)^{\frac{1}{p}} dt$ gegeben ist.[3]

2. Dafür dass s von der Wahl des Parameters t unabhängig sein soll, ist es notwendig und hinreichend, dass A_i bzw. B homogen von Dimension $p-2$ bzw. p in bezug auf x'^j ist und $A_i x'^i = 0$. A_i ist ein kovarianter Vektor, aber B ist kein Skalar. Es ergeben sich noch zwei kovariante Vektoren, die aus dem Integral ohne weiteres bestimmt sind:

$$(1) \qquad T_i = -2\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x''^i} + \frac{\partial F}{\partial x'^i}, \qquad E_i = \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial x''^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'^i} + \frac{\partial F}{\partial x^i},$$

setzend $F = A_i x''^i + B$. Voraussetzend $p \neq 0, \frac{3}{2}$, und dass die Determinante des Tensors $G_{ik} = 2A_{i(k)} - A_{k(i)}$ nicht identisch verschwindet, geht ein kontravarianter Vektor

$$(2) \qquad \overset{2}{x}{}^l \equiv -T_i G^{il} = x''^l + 2\Gamma^l$$

1) E. Cartan, Journal de Mathématique, (9) **15** (1936), S. 42–69.
2) H. Hombu, Proc. **12** (1936), S. 156–161.
3) Die Theorie wird hier nur rasch skizziert, und ich möchte sie nochmals anderswo ausführlich beschreiben.