PAPERS COMMUNICATED

16. *Zur Idealtheorie der einartigen Ringbereiche mit dem Teilerkettensatz.*

Von Yasuo AKIZUKI.
Dai San Koto Gakko zu Kyoto.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1937.)

Der Zweck dieser Arbeit[1] liegt in der Verallgemeinerung der folgenden beiden fundamentalen Sätze über einartige Ringbereiche mit dem Teilerkettensatz:

1. *Dann und nur dann sind die zu demselben Primideal* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale sämtlich Potenzen von* $\mathfrak{p}$, *wenn kein echtes Zwischenideal zwischen* $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{p}^2$ *existiert.* (Diesen Satz verdankt man M. Sono.[2])

2. *Dann und nur dann sind alle zu* $\mathfrak{p}$ *gehörigen Primärideale für jedes* $\mathfrak{p}$ *Potenzen von* $\mathfrak{p}$, *wenn der Grundintegritätsbereich in seinem Quotientenkörper ganz-abgeschlossen ist.* (Dieser Satz stammt von E. Noether.[3])

Es sei $\mathfrak{R}$ ein einartiger Ringbereich mit dem Teilerkettensatz, $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ sein Quotientenring nach einem Primideal $\mathfrak{p}$. Bekanntlich kann man die bei der Komposition der $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$-Ideale gewonnenen Ergebnisse sofort auf die zu $\mathfrak{p}$ gehörigen $\mathfrak{R}$-Primärideale übertragen. Daher legt man vorerst den Primärring (mit oder ohne Nullteiler) mit dem Teilerkettensatz zugrunde. In einem solchen Bereich ist der Rang $\chi(\mathfrak{a})$[4] vom Restklassenmodul $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ über $K \simeq \mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ gleich der Anzahl der notwendigen Basiselemente vom Ideal $\mathfrak{a}$.[5] Somit ist die Bedingung, dass keine Zwischenideale zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ liegen, äquivalent mit der Bedingung, dass $\chi(\mathfrak{p})=1$ ist. Man ersetzt also die Sonosche Bedingung durch die *Bedingung*

I. Es sei für eine vorgegebene natürliche Zahl n $\chi(\mathfrak{p}^n)=n$.

Im allgemeinen gilt folgendes für den Primärring mit dem Teilerkettensatz:

Satz 1. *Es sei* $\chi(\mathfrak{p}^l)\leqq l$, *und der Restklassenkörper* $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ *besitze mindestens* $\chi(\mathfrak{p}^l)$ *Elemente. Dann gilt die Gleichung* $\mathfrak{p}^l=(\pi)\,\mathfrak{p}^{l-1}$, *wenn, was für den Integritätsbereich stets der Fall ist, ein Element* a *mit* $a^l \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{l+1})$ *in* $\mathfrak{p}$ *existiert.*[6]

Satz 2. *Es sei* $\mathfrak{p}^l=(\pi)\,\mathfrak{p}^{l-1}$ *und* $\chi(\mathfrak{p}^l)\leqq l$. *Falls* $\mathfrak{R}$ *keinen Nullteiler besitzt, ist für jedes* $\nu \geqq l-1$ $\chi(\mathfrak{p}^\nu)=\chi(\mathfrak{p}^l)$.

Aus diesen Sätzen ergibt sich

---

1) Diese Arbeit wird ausführlich anderen Ortes publiziert werden.

2) M. Sono, On Congruences, II, III, IV, Mem. Coll. Sci. Kyoto, 2, 3, 3 (1918–1919).

3) E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie, Math. Ann., **96** (1927).

4) $\chi(\mathfrak{a})$ ist nichts anders als die sogenannte „Hilbertsche Zahl."

5) Vgl. W. Gröbner, Über irreduzible Ideale in kommutativen Ringen, Math. Ann., **110** (1934).

6) Satz 1 ist nicht immer richtig, wenn $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ höchstens $\chi(\mathfrak{p}^l)-1$ Elemente besitzt. Vgl. ein Beispiel am Schluss dieser Arbeit.