72. Über die Invarianten der endlichen Gruppen halblinearer Transformationen.

Von Kenjiro SHODA.
Mathematical Institute, Osaka Imperial University.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 12, 1938.)

In einer früheren Arbeit habe ich gemeinsam mit T. Nakayama die Darstellungen endlicher Gruppen durch halblineare Transformationen untersucht.[1] Daranschliessend werde ich in der vorliegenden Note den Invariantenbegriff für die halblinearen Transformationsgruppen einführen, der eine naturgemässe Verallgemeinerung des üblichen Invariantenbegriffes in der Theorie der linearen Transformationen bildet.

§ 1. Absolute Invariante.

Es sei K ein Körper von der Charakteristik Null; $S, T, \dots$ seine Automorphismen. Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, die aus den halblinearen Transformationen $x'_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^S$ oder kurz $x'=Ax^S$ besteht, so bilden die darauftretenden Automorphismen $S, T, \dots$ eine Gruppe $\mathfrak{A}$, die einer Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ isomorph ist. $\mathfrak{A}$ ist die galoissche Gruppe von K in bezug auf einen Unterkörper k.

Definition 1. Ein Polynom $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oder kurz $F(x)$ heisst eine (absolute) Invariante von $\mathfrak{G}$, wenn $F(A^{-1}x^S)=F(x)^S$ für jede halblineare Transformation $x'=Ax^S$ aus $\mathfrak{G}$ ist.

Sind die S sämtlich identischer Automorphismus von K, so ist $\mathfrak{G}$ eine lineare Transformationsgruppe und $F(x)$ ist nichts anderes als Invariante im üblichen Sinne. Enthält $F(x)$ auf der anderen Seite keinen Variabel x, so ist also ein Element aus K dann und nur dann Invariante, wenn es in k enthalten ist. Im allgemeinen ist jede Invariante von $\mathfrak{G}$ sicher Invariante der linearen Transformationsgruppe $\mathfrak{H}$.

Die Gesamtheit der Invarianten von $\mathfrak{H}$ des Grades m bildet einen K-Modul. Sind $F_1(x), F_2(x), \dots, F_r(x)$ die Basiselemente, so werden sie bei den Transformationen aus $\mathfrak{G}$ so transformiert, dass man dadurch eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ durch halblineare Transformationen erhält. Dies erkennt man leicht, wenn man $x_1, x_2, \dots, x_n$ als die Basiselemente des Darstellungsmoduls von $\mathfrak{G}$ betrachtet. Die Invariante von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$ bildet dann die Basis eines identischen Darstellungsmoduls von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$. Sind in der Tat $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Basis des Darstellungsmoduls von $\mathfrak{G}$, so wird $F(x)$ durch einen Operator aus $\mathfrak{G}$ in $F^S(x')$ übergeführt, wobei $x'=Ax$ und $F^S(x)$ ein Polynom bedeutet, das man erhält, wenn man die Koeffizienten von $F(x)$ durch S transformiert. Ist die durch $F(x)$ vermittelte Darstellung eine identische, so muss $F(x)=F^S(x')$ sein.

---

1) T. Nakayama und K. Shoda, Über die Darstellung einer endlichen Gruppe durch halblineare Transformationen, Jap. Journal, **12** (1936), 109–122. Vgl. auch M. Osima, Über die Darstellung einer Gruppe durch halblineare Transformationen, Proc. Physico-Math. Soc. Japan, **20** (1938), 1–5.