

PAPERS COMMUNICATED

67. Eine konformgeometrische Verallgemeinerung der geodätischen Linien.

Von Tsurusaburo TAKASU.

Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1938.)

Wir betrachten eine Kurve $\mathfrak{x}(s)$ ($(\mathfrak{x}\mathfrak{x})_i \equiv 0$, $i=5$ od. 4)

im konformen Raume

| in der konformen Ebene

von Liouville und Möbius als eines der beiden Hüllgebilde $\mathfrak{x}(s)$, $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ einerKugelschar $\xi = \xi(s)$, $((\xi\xi)_5 = 1)$, | Kreisschar $\xi = \xi(s)$, $((\xi\xi)_4 = 1)$,wobei die beiden Punkte $\mathfrak{x}(s)$ und $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ ($(\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{x})_i \equiv 0$) durch die Forderungen

$$(1) \quad (\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}})_i = 2k^2, \quad (d\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}})_i \equiv -(d\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{x})_i = 0, \quad (i=5 \text{ od. } 4)$$

normiert sind und der Parameter s die konforme Länge ist:¹⁾

$$(2) \quad ds^2 = (d\mathfrak{x}d\mathfrak{x})_5. \quad | \quad ds^2 = (d\bar{\mathfrak{x}}d\bar{\mathfrak{x}})_4.$$

Wir leiten daraus eine zweite Kurve ($\tilde{\mathfrak{x}}^*$) her durch den Ansatz

$$(3) \quad \tilde{\mathfrak{x}}^* = \bar{\mathfrak{x}} + (ut + vz + w\mathfrak{X}' + q\mathfrak{X}), \quad | \quad \tilde{\mathfrak{x}}^* = \bar{\mathfrak{x}} + (ut + w\xi + q\mathfrak{X}),$$

$$\tilde{\mathfrak{x}} \equiv \rho(s)\mathfrak{x},$$

wobei u, v, w und q Funktionen von s bedeuten, die noch einen Parameter ε enthalten:

$$(4) \quad u = \varepsilon \bar{u}(s), \quad v = \varepsilon \bar{v}(s), \quad w = \varepsilon \bar{w}(s), \quad q = \varepsilon \bar{q}(s),$$

und, wegen $(\tilde{\mathfrak{x}}^*\tilde{\mathfrak{x}}^*)_i = 0$, $(\tilde{\mathfrak{x}}\tilde{\mathfrak{x}})_i = 0$,

$$(5) \quad \begin{array}{l} 2\mu^{-1}(w + iq)\rho + u^2 + v^2 \\ + w^2 + q^2 = 0 \end{array} \quad | \quad \begin{array}{l} 2\mu^{-1}q\rho + u^2 + w^2 + q^2 = 0 \end{array}$$

ist. Rückt $\varepsilon \rightarrow 0$, so rückt die Nachbarkurve ($\tilde{\mathfrak{x}}^*$) gegen ($\bar{\mathfrak{x}}$). Wir wollen den Parameter

$$(6) \quad \tilde{s}^* = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\left(\frac{d\tilde{\mathfrak{x}}^*}{ds} \frac{d\tilde{\mathfrak{x}}^*}{ds}\right)_i} ds$$

nach Potenzen von ε entwickeln. Diese Entwicklung ist von der Form

$$(7) \quad \tilde{s}^* = \tilde{s} + \delta g + \dots, \quad (d\tilde{s}^2 = (d\tilde{\mathfrak{x}}d\tilde{\mathfrak{x}})_i = \rho^2 ds^2),$$

wenn mit δg das in ε lineare Glied bezeichnet wird:

$$(8) \quad \delta g = \varepsilon \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{s}^* - \tilde{s}}{\varepsilon}.$$

1) Wir benutzen die Bezeichnungsweise im Buch: T. Takasu, Differentialgeometrien in den Kugelräumen, Bd. I. Tokyo (1938), S. 74 und S. 99.