

64. Über die Irreduzibilität gewisser ganzzahliger Polynome.

Von Tikao TATUZAWA.

Fourth Higher School, Kanazawa.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 12, 1939.)

In der vorliegenden Note werde ich als Verschärfung eines bekannten Satzes von Pólya¹⁾ über die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome u. a. beweisen den folgenden

Satz 1. *Nimmt ein ganzzahliges Polynom $P(x)$ vom Grade n an n voneinander verschiedenen ganzzahligen Stellen Werte an, die sämtlich von 0 verschieden und absolut genommen kleiner als $\sqrt[n]{2^n(n-1)!}$ sind, so ist $P(x)$ irreduzibel (im rationalen Zahlkörper).*

Zunächst seien k, t ganz, $k \geq t \geq 1$, und $x_1, \dots, x_{k+1}$ seien von einander verschiedene Zahlen. Man nehme aus diesen $(k+1)$ Zahlen ganz beliebig ein System von $(t+1)$ Zahlen $x'_1, \dots, x'_{t+1}$ aus und bilde die absoluten Beträge aller Differenzen $|x'_i - x'_j|$ ($i \neq j$). Alsdann sei $\varphi(t)$ die untere Grenze von den $\text{Max } |x'_i - x'_j|$ für alle solchen $\binom{k+1}{t+1}$ Systeme. Dann gilt

Satz 2. *Ist $f(x) = a_0 x^k + \dots + a_k$ ein Polynom vom Grade k , so ist*

$$\text{Max}_{i \leq k+1} |f(x_i)| \geq |a_0| \cdot 2^{-k} \varphi(k) \varphi(k-1) \dots \varphi(1).$$

Beweis. Ist $k=1$, so ist dies klar. Um also die vollständige Induktion anzuwenden, nehmen wir an, dass dieser Satz bis für $k-1$ richtig ist. Alsdann sei ferner ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\varphi(k) = \text{Max}_{i, j \leq k+1} |x_j - x_i| = |x_1 - x_{k+1}|.$$

Wenn man nun

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_k) + g(x) \\ &= a_0(x-x_2)(x-x_3) \dots (x-x_{k+1}) + h(x) \end{aligned}$$

schreibt, so ist der erste Koeffizient von $g(x)$ bzw. $h(x)$ gleich

$$b_0 = a_1 + a_0(x_1 + \dots + x_k) \quad \text{bzw.} \quad c_0 = a_1 + a_0(x_2 + \dots + x_{k+1}).$$

Folglich ist $|b_0 - c_0| = |a_0| \varphi(k)$, also $\text{Max}(|b_0|, |c_0|) \geq |a_0| \frac{\varphi(k)}{2}$. Wagen unserer Annahme ist also entweder

$$\text{Max}_{i \leq k} |g(x_i)| = \text{Max}_{i \leq k} |f(x_i)|, \quad \text{oder} \quad \text{Max}_{2 \leq i \leq k+1} |h(x_i)| = \text{Max}_{2 \leq i \leq k+1} |f(x_i)|$$

grösser als $|a_0| \frac{\varphi(k)}{2} 2^{-k+1} \varphi(k-1) \dots \varphi(1)$, w. z. b. w.

1) Vgl. etwa G. Pólya und G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis 2, Berlin (1925), S. 136. (Prob. 118).