

83. Bemerkungen zur Theorie der allgemeinen Kugelfunktionen.

Von Yukiyosi KAWADA.

Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 12, 1939.)

In der vorliegenden Note soll zunächst die bekannte Theorie der abgeschlossenen Familie (closed family) von fastperiodischen Funktionen auf einer Gruppe $\mathfrak{G}$ auf die rechtsseitig abgeschlossene Familie verallgemeinert werden (§ 1). Daraus wird sich die Weylsche Theorie²⁾ der Entwicklung von Funktionen auf der homogenen Mannigfaltigkeit herleiten lassen (§ 2). Zum Schluss sollen als wichtiges Beispiel die Kugelfunktionen auf der n -dimensionalen Kugel gruppentheoretisch näher betrachtet werden (§ 3).

1. Für eine abstrakte Gruppe $\mathfrak{G}$ definieren wir nach dem Vorbild von J. von Neumann (N. Def. 13) die *rechtsseitig abgeschlossene Familie* $\mathfrak{F}$ von fastperiodischen Funktionen folgendermassen:

1) $\mathfrak{F}$ ist die Menge von (komplexwertigen) fastperiodischen Funktionen $f(s)$ auf $\mathfrak{G}$.

2) Aus $\mathfrak{F} \ni f(s)$ folgt $f(sa) \in \mathfrak{F}$, falls a ein Element aus $\mathfrak{G}$ ist.

3) Aus $\mathfrak{F} \ni f(s)$, $\mathfrak{F} \ni g(s)$ folgt $\mathfrak{F} \ni \alpha f(s) + \beta g(s)$, falls α, β Konstanten sind.

4) Aus $\mathfrak{F} \ni f_n(s)$ ($n=1, 2, \dots$) und $f_n(s) \rightarrow f(s)$ gleichmässig auf $\mathfrak{G}$ (bei $n \rightarrow \infty$) folgt $\mathfrak{F} \ni f(s)$.

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{F}$ immer eine rechtsseitig abgeschlossene Familie. Es sei nun $\mathfrak{D}: s \rightarrow D(s) = (d_{ij}(s))$ eine irreduzible unitäre Darstellung n -ten Grades von $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{m}$ sei ein Darstellungsmodul von $\mathfrak{D}$, welcher aus Funktionen von $\mathfrak{F}$ besteht, wobei $t \cdot f(s) = f(st)$ bedeutet. Wenn also $(f_1(s), \dots, f_n(s))$ eine passend gewählte Basis von $\mathfrak{m}$ ist, dann gilt nämlich

$$(1) \quad t(f_1(s), \dots, f_n(s)) = (f_1(st), \dots, f_n(st)) = (f_1(s), \dots, f_n(s)) D(t),$$

Insbesondere ist

$$(2) \quad (f_1(s), \dots, f_n(s)) = (f_1(1), \dots, f_n(1)) D(s);$$

Also entspricht jedem Darstellungsmodul $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{D}$ ein n -dimensionaler (komplexwertiger) Euklidischer Vektor

$$(3) \quad v(\mathfrak{m}, \mathfrak{D}) = (f_1(1), \dots, f_n(1)),$$

der vom 0-Vektor verschieden und bis auf einen Konstantenfaktor durch $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{D}$ eindeutig bestimmt ist.

1) J. von Neumann, Almost periodic functions in a group; Trans. Am. math. Soc., **38**, (1934); im folgenden zitiert mit (N).

2) H. Weyl, Harmonics on spherical manifolds, Annals of math., **35**, (1934).