84. *Eine Bemerkung über einfache Systeme.*

Von Makoto ABE.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct., 12, 1940.)

1. Herr W. Landherr bemerkt in seiner Arbeit über einfache Liesche Ringe,[1] dass jedes einfache distributive System $\mathfrak{S}$ über einem Grundkörper k der Charakteristik 0 sich als ein einfaches System $\mathfrak{t}_{/K}$ über einem (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten, endlichen) Erweiterungskörper K von k betrachten lässt, welches letztere bei algebraischem Abschliessen des Grundkörpers K einfach bleibt. Diese in einer sehr umfassenden Klasse von assoziativen bzw. nicht assoziativen Systemen gültige Behauptung stellt er unter der einzigen Annahme fest, dass das betreffende System $\mathfrak{S}_{/k}$ bei algebraischem Abschliessen des Grundkörpers eindeutig in die direkte Summe der einfachen Ideale zerfallen soll. Im folgenden soll gezeigt werden, dass auch diese Voraussetzung überflüssig ist; dass sie tatsächlich aus der Einfachheit von $\mathfrak{S}$ folgt; und dass übrigens der Gründkörper k ein ganz beliebiger vollkommener Körper (also z. B. auch ein Galois-Feld) sein kann.[2]

2. Von je zwei Elementen x, y aus einem endlichen k-Modul $\mathfrak{S}$ (k: ein Körper) sei das „Produkt" xy unter einziger Bedingung definiert, dass xy in bezug auf x und y bilinear ist:

$$\begin{aligned}(a_1x_1+a_2x_2)y&=a_1(x_1y)+a_2(x_2y)\,,\\ x(a_1y_1+a_2y_2)&=a_1(xy_1)+a_2(xy_2)\,,\end{aligned}\qquad a_1, a_2 \in k$$

Ein solches System $\mathfrak{S}$ nennen wir ein distributives System über k oder kurz ein „*k-System*". Bilden $u_1, u_2, \dots, u_r$ eine k-Basis von $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{S}=ku_1+\cdots+ku_r\,,$$

so wird das k-System $\mathfrak{S}$ durch die Multiplikationstabelle der Basiselement u_i vollständig bestimmt:

$$u_iu_j=\sum_{k-1}^{r} c_{ij}^k u_k\,;\qquad 1\leqq i\,,\ j\leqq r\,,\qquad c_{ij}^k\in k\,.$$

c_{ij}^k heissen Strukturkonstanten von $\mathfrak{S}$. Erweitert man den Grundkörper k zu einem Oberkörper K und lässt dabei die Strukturkonstanten unverändert, so entsteht ein K-System $\mathfrak{S}_K=Ku_1+\cdots+Ku_r$. Wir schreiben statt $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_K$ auch $\mathfrak{S}_{/k}$ bzw. $\mathfrak{S}_{K/k}$, um den ursprünglichen Grundkörper k kenntlich zu machen.

Ein k-Teilmodul $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{S}$ heisse (zweiseitiges) Ideal von $\mathfrak{S}$, wenn

1) W. Landherr; Über einfache Liesche Ringe (Abh. Math. Sem. Hamburg, **11** (1936), 41–64), Sätze 1 und 2.

2) So können wir die Diskriminantenbetrachtung vermeiden, die Herr Landherr zur Verifikation seiner Voraussetzung bei assoziativen bzw. alternativen bzw. Lieschen Systemen zu Hilfe nimmt, was nur im Falle der Charakteristik 0 zum Ende führt.