80. *Sur un problème de M. A. Beurling.*

Par Kinjiro KUNUGUI.

Institut de Mathématiques, Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1940.)

1. Soient D un domaine quelconque et z_0 un des points non isolés de sa frontière Γ. Soit encore $f(z)$ une fonction méromorphe et uniforme dans D. Désignons par $S_{z_0}^{(D)}$ l'ensemble de toutes les valeurs a ($w=\infty$ y incues), pour lesquelles il existe une suite de points z_n de D, telle que $a=\lim_{n\to\infty} f(z_n)$, $\lim_{n\to\infty} z_n=z_0$, et par $S_{z_0}^{(\Gamma)}$ le produit $\prod_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$ où $\bar{A}_n$ désigne la fermeture de A_n et A_n est la somme de tous les ensembles $S_{z'}^{(D)}: A_n=\sum S_{z'}^{(D)}$, la sommation s'étendant à tous les points z' de Γ qui satisfont à $0<|z'-z_0|<1/n$. z_0 sera dit *simple*, si tout voisiange $V(z_0)$ de z_0 possède un autre voisinage $W(z_0)$ de z_0, $W(z_0)\subseteq V(z_0)$, tel que toute couple des points de la partie commune $W(z_0)\cdot D$ peuvent être liés par une courbe continue située entièrement dans $V(z_0)\cdot D$.

M. A. Beurling[1] a conjecturé que la proposition suivante est vraisemblable: *Soient z_0 un point frontière d'un domaine D, simple et régulière pour le problème de Dirichlet*[2] *et $f(z)$ une fonction, holomorphe et uniforme dans D. Si w est un nombre fini appartenant à l'ensemble $S_{z_0}^{(D)}$, mais n'appartenant pas à $S_{z_0}^{(\Gamma)}$, l'équation:*

$$f(z)-w=0$$

possède dans D une infinité de zéros convergeant vers z_0, sauf au plus une seule valeur w de cette espèce.

Puisque la valeur $w=\infty$ n'est pas toujours une valeur exceptionnelle de notre sens pour les fonctions holomorphes, considérons une proposition moins restrictive:

Proposition A. Soit z_0 un des points frontières d'un domaine D, simple et réguliere pour le problème de Dirichlet. Soie encore $f(z)$ une fonction holomorphe (ou plus généralement méromorphe) et uniforme dans D. Alors, pour toute valeur w de l'ensemble $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(\Gamma)}$, l'équation

$$f(z)-w=0$$

possède dans D une infinité de zéros convergeant vers z_0, sauf au plus deux valeurs w finies (ou infinie) de cette espèce.

Le but de cette Note est d'abord de montrer que, sans restriction, même la proposition A n'est pas toujours réalisée (voir l'exemple de no. 2), et deuxièmement d'établir un énoncé modifié comme il suit. Supposons seulement que z_0 est un point non isolé de la frontière Γ de

---

1) A. Beurling: Étude sur un problème de Majoration, Thèse de Upsal (1933), p. 163.

2) Quanta à la définition, voir par exemple A. Beurling: ibid. p. 66; M. Brelot: Le problème de Dirichlet sous sa forme moderne, Mathematica vol. VII (1933), p. 153.