120. *Über die homomorphe Darstellung der Verbände und der multiplikativen Systeme.*

Von Yukiyosi KAWADA.

Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 12, 1940.)

Bekanntlich[1] kann jeder distributive Verband als Mengenverband verbandisomorph dargestellt werden. Da umgekehrt jeder Mengenverband distributiv ist, kann ein nicht distributiver Verband niemals als Mengenverband treu dargestellt werden. Nach MacNeille[2] verstehen wir unter einem *multiplikativen System* $\mathfrak{M}$ (kurz M. S.) eine teilweise geordnete Menge, in welcher zu je zwei Elementen a, b aus $\mathfrak{M}$ der Durchschnitt $a \frown b$ eindeutig bestimmt ist, wobei die Existenz der Vereinigung von a und b nicht vorausgesetzt wird. In der vorliegenden Note soll die Darstellung des M. S. $\mathfrak{M}$ als multiplikatives Mengensystem und im allgemeinen die Einbettung in einem distributiven Verband behandelt werden. Zuerst wird einige Eigenschaften der Homomorphismen der Verbände (§ 1) und der M. S. (§ 2) gegeben werden. Das Problem, $\mathfrak{M}$ in einem distributiven Verband mit möglichst einfacher Struktur einzubetten, was schon von MacNeille behandelt wurde,[2] wird zunächst mit Hilfe der Idealtheorie in der Halbgruppen von A. H. Clifford[3] abstrakt gelöst (§ 3), und dann im Zusammenhang mit den Homomorphismen und Darstellungen von $\mathfrak{M}$ untersucht (§ 4, § 5).

1. Es sei $\mathfrak{V}$ ein distributiver Verband mit Einselement e. Unter einem *v-Homomorphismus* f von $\mathfrak{V}$ zu einem Verband $\mathfrak{V}'$ verstehen wir eine eindeutige Zuordnung $a \to f(a)$ von $\mathfrak{V}$ auf $\mathfrak{V}'$, so dass dabei $f(a \smile b) = f(a) \smile f(b)$, $f(a \frown b) = f(a) \frown f(b)$ gelten. Zwei v-Homorphismen f_1 und f_2 von $\mathfrak{V}$ zu $\mathfrak{V}_1$ bzw. $\mathfrak{V}_2$ heissen *äquivalent*, falls $f_1(a) = f_1(b) \leftrightarrow f_2(a) = f_2(b)$ ist, was wir mit $f_1 \sim f_2$ bezeichnen. Die Gesamtheit aller zu einem gegebenen f äquivalenten v-Homomorphismen bezeichnen wir mit $\bar{f}$.

Nun führen wir bzg. der Gesamtheit $\mathfrak{F}(\mathfrak{V})$ aller äquivalenten Homomorphismenklassen $\bar{f}$ die Anordnung folgendermassen ein: $\bar{f}_1 \supset \bar{f}_2$ gilt dann und nur dann, wenn aus $f_1(a) \supset f_1(b)$ $f_2(a) \supset f_2(b)$ folgt. Dann bildet $\mathfrak{F}(\mathfrak{V})$ ersichtlich eine teilweise geordnete Menge, und der identische v-Homomorphismus von $\mathfrak{V}$ auf sich selbst ist das Einselement von $\mathfrak{F}(\mathfrak{V})$.

Eine wichtige Klasse der v-Homomorphismen bilden die *Projektionen* $\{f_a\}$ $(a \in \mathfrak{V})$: Die Projektion f_a wird dabei definiert als die Zuordnung

---

1) G. Köthe, Die Theorie der Verbände, Enziklopädie d. math. Wiss., I (2. Aufl.), (1940), § 10.

2) M. H. MacNeille, Partially ordered sets, Trans. Amer. math. Soc., **42** (1937), 416-460.

3) A. H. Clifford, Arithmetic and ideal theory of commutative semigroups, Annals of math., **39** (1938), 594-610.