15. Über die Einfachheit der speziellen projektiven Gruppen.

Von Kenkiti IWASAWA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1941.)

Die Gesamtheit der nicht singulären linearen Transformationen des n-dimensionalen Vektorraumes in sich über einem Körper K bildet eine Gruppe, welche die allgemeine lineare Gruppe $GL(n, K)$ heisst[1]. Wir schreiben nun die Transformationen aus $GL(n, K)$ in der Form

$$\begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

In $GL(n, K)$ bilden die Transformationen mit Determinante Eins einen Normalteiler, welcher die spezielle lineare Gruppe $SL(n, K)$ heisst. Diese Gruppe wird erzeugt durch die Transformationen

$$B_{r,s,\lambda}: \begin{cases} \xi_r' = \xi_r + \lambda \xi_s & (r \neq s) \\ \xi_\nu' = \xi_\nu & \nu \neq r, \end{cases}$$

wobei λ alle Elemente aus K durchläuft[2]. Das Zentrum von $SL(n, K)$ besteht aus allen λE mit $\lambda^n = 1$, wenn mit E die identische Transformation bezeichnet wird. Die Faktorgruppe von $SL(n, K)$ nach dem Zentrum heisst die spezielle projektive Gruppe $PSL(n, K)$.

Für $n > 1$ ist nun $PSL(n, K)$ eine *einfache* Gruppe, ausser in zwei Fällen $n=2$, $K=GF(2)$ und $n=2$, $K=GF(3)$. Dieser Satz wurde zuerst von L. E. Dickson für endliche Grundkörper K bewiesen[3]. Sein Beweis aber wird, wie van der Waerden bemerkt[4], durch eine kleine Abänderung auch für den Fall unendlicher Grundkörper K gültig, wenn K von der Charakteristik $\neq 2$ oder vollkommen ist.

In der vorliegenden Note soll dieser Satz ohne oben erwähnte Einschränkung über K neu bewiesen werden.

Hilfssatz 1. $SL(n, K)$ fällt mit seiner Kommutatorgruppe zusammen, ausser wenn $n=2$, $K=GF(2)$ oder $n=2$, $K=GF(3)$.

Beweis. Zunächst sei $n \geqq 3$ und i, j $(1 \leqq i, j \leqq n)$ beliebig gegeben. Für $k \neq i, j$ gilt dann

$$B_{i,k,\lambda} B_{k,j,1} B_{i,k,\lambda}^{-1} B_{k,j,1}^{-1} = B_{i,j,\lambda}.$$

Damit ist unsere Behauptung erledigt.

---

1) Bzgl. der Bezeichnungen $GL(n, K)$, $SL(n, K)$ u.s.w. vgl. B. L. van der Waerden: Gruppen von linearen Transformationen, 1935.

2) Vgl. L. E. Dickson: Linear groups, with an exposition of Galois Field theory, 1901, S. 78.

3) Vgl. loc. cit. 2), S. 83.

4) Vgl. loc. cit. 1), S. 7.