32. *Eine hinreichende Bedingung für die eindeutige Primfaktorzerlegung der Ideale in einem kommutativen Ring.*

Von Yosi KOBAYASI und Mikao MORIYA.
Mathematisches Institut der Kaiserlichen Hokkaido Universität, Sapporo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1941.)

In einem kommutativen Ring $\mathfrak{o}$ seien die folgenden Axiome erfüllt:

1) In $\mathfrak{o}$ existiert das Einselement.
2) Für jedes Ideal aus $\mathfrak{o}$ gilt der Teilerkettensatz.
3) Zu jedem Primideal[1] $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{o}$ existiert stets kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$.
4) Nur ein nilpotentes Ideal kann das von Null verschiedene annullierende Ideal[2] besitzen.

Unter den obigen Axiomen beweisen wir folgenden

Hauptsatz. *Jedes vom Null- und Einheitsideal verschiedene Ideal aus $\mathfrak{o}$, wenn es überhaupt existiert, läßt sich als Produkt aus endlich vielen, vom Null- und Einheitsideal verschiedenen Primidealen darstellen. Ferner sind diese Produktdarstellungen bis auf die Reihenfolge der Primfaktoren[3] eindeutig bestimmt.*

1. Satz 1. *Es sei $\mathfrak{c}$ ein von Null verschiedenes Ideal und $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus $\mathfrak{o}$. Gilt dann für ein Ideal $\mathfrak{q} \geqq \mathfrak{p}$ die Gleichung $\mathfrak{c}\mathfrak{p} = \mathfrak{c}\mathfrak{q}$, so ist stets $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.*

Beweis. Da für das Ideal $\mathfrak{c}$ der Teilerkettensatz gilt, so besitzt $\mathfrak{c}$ bekanntlich eine Idealbasis $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Für ein beliebiges Element τ aus $\mathfrak{q}$ gilt nun:

$$\tau\gamma_i = p_{i1}\gamma_1 + \cdots + p_{in}\gamma_n \qquad (i=1, \dots, n),$$

wo die p_{ij} Elemente aus $\mathfrak{p}$ bezeichnen. Hieraus folgt ohne weiteres:

$$\gamma_i \begin{vmatrix} p_{11}-\tau \cdots\cdots p_{1n} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ p_{n1} \qquad\quad p_{nn}-\tau \end{vmatrix} = 0 \qquad (i=1, \dots, n).$$

Bezeichnet man nun mit $\varDelta$ die Determinante $\begin{vmatrix} p_{11}-\tau \cdots\cdots p_{1n} \\ \vdots \\ p_{n1} \cdots\cdots\cdots p_{nn}-\tau \end{vmatrix}$,

so erhält man die Kongruenz

---

1) Wir rechnen $\mathfrak{o}$ unter die Primideale und ebenso auch (0), falls es die Primidealeigenschaft besitzt.

2) Für die Definition des annullierenden Ideales vergleiche man unsere vorangehende Note: Mikao Moriya und Yosi Kobayasi, Eine notwendige Bedingung für die Primfaktorzerlegung der Ideale in einem kommutativen Ring.

3) Unter einem Primfaktor eines Ideales verstehen wir stets ein vom Null- und Einheitsideal verschiedenes Primideal.