48. *Über die allgemeinen algebraischen Systeme, III**.

Von Kenjiro SHODA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1942.)

§ 10. *Isomorphiesätze.* Die in § 1 eingeführten Restklassenzerlegungen eines algebraischen Systems $\mathfrak{A}$ bilden bekanntlich einen Verband, wenn man den Durchschnitt $\varphi \frown \psi$ zweier Zerlegungen φ, ψ als die Zerlegung definiert, die aus den Durchschnitten der Restklassen nach φ und ψ besteht. Die Vereinigung $\varphi \smile \psi$ soll dann als die feinste Restklassenzerlegung θ mit $\theta \frown \varphi = \varphi$, $\theta \frown \psi = \psi$ definiert.

Wenn einen Restklassenzerlegung mindestens ein Untersystem $\mathfrak{B}$ als eine Restklasse enthält, so heisst sie eine Restklassenzerlegung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, sie wird mit $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ bezeichnet[1]. $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ ist im allgemeinen durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ nicht eindeutig bestimmt[2]. Die Menge aller Restklassensysteme $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ nach einem festen $\mathfrak{B}$ heisst der *Schar der Restklassensysteme,* der mit $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ bezeichnet wird. Ein Schar der Restklassensysteme $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ heisst zu einem anderen $[\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}']$ *einseitig isomorph,* wenn zu jedem $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ mindestens ein $\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}'$ isomorph ist. Wenn ferner $[\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}']$ zu $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ einseitig isomorph, so spricht man von dem *gegenseitigen Isomorphismus.* Analog kann man den Homomorphismus und den Meromorphismus der Schare der Restklassensysteme definieren.

Der Einfachheit halber nehmen wir im folgenden stets an, daß unsere algebraischen Systeme stets ein Element (Nullelement) 0 enthält, das in sich ein Untersystem bildet: $0\alpha 0 = 0$ für jede Verküpfung α. Wir betrachten dann nur die Untersysteme, die 0 enthält. Jedes Restklassensystem ist dann in der Form $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ darstellbar mit einem Untersystem $\mathfrak{B}$, da jede 0 enthaltende Restklasse ein Untersystem sein muss. Den Schar $[\mathfrak{A}/0]$ bezeichnen wir mit $[\mathfrak{A}]$, welches mehr als ein Restklassensysteme enthalten kann. Ein Untersystem $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ heisst *normal,* wenn mindestens ein $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ existiert.

Aus dem in § 1 angegebenen Homorphiesatz folgt unmittelbar

Homomorphiesatz. Ist $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph, so ist $\mathfrak{A}'$ einem Restklassensystem $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ nach dem 0 *von $\mathfrak{A}'$ zugeordneten normalen Untersystem $\mathfrak{B}$ isomorph. Also ist $[\mathfrak{A}']$ zu $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ einseitig isomorph.*

Aus dem Homomorphiesatz folgt wegen der Transitivität der einseitigen Isomorphismen

Erster Isomorphiesatz. Ist $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph und ist $\mathfrak{B}'$ ein normales Untersystem von $\mathfrak{A}'$, so ist $[\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}']$ zu $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ einseitig isomorph, wo $\mathfrak{B}$ das $\mathfrak{B}'$ entsprechende normale Untersystem von $\mathfrak{A}$ ist.

Ist $\mathfrak{B}$ ein normales Untersystem von $\mathfrak{A}$ und ist $\mathfrak{C}$ ein $\mathfrak{B}$ enthal-

---

* I und II in Proc. **17** (1941), 323–327; **18** (1942), 171–176.

1) Mit $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ bezeichnen wir nicht nur die Restklassenzerlegung sondern auch das dadurch erhaltende Restklassensystem.

2) Betrachtet man z. B. eine Menge M ohne Verknüpfung und eine Untermenge N, so erhält man durch eine beliebige Partition der komplementären Menge M–N stets eine Restklassenzerlegung von M nach N.