118. Zur projektiven Theorie der Bahnkurven dritter Ordnung.

Von Hitoshi HOMBU und Misao MIKAMI.
Kyusyu Teikoku-Daigaku und Hukuoka Koto-Gakko.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Dec. 12, 1942.)

1. In einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit wird ein System der „paths" (oder Bahnkurven) 3-ter Ordnung durch ein System der Differentialgleichungen 3-ter Ordnung

$$(1) \qquad x^{(3)i}+H^i(t, x, x^{(1)}, x^{(2)})=0 \qquad (i=1, 2, \dots, n)$$

($x^{(m)i}=d^m x^i/dt^m$) gegeben. Vor kurzem hat einer von uns eine Begründung der projektiven Theorie der „paths", die mit einer merkwürdigen Eigenschaft Γ ausgestattet sind, gegeben[1]. Um diese Eigenschaft kurz zu erläutern, beachten wir vorerst den Unterschied zwischen dem Linien- und dem Kurvenelement. Durch Angabe einer beliebigen Parametrisierung t auf einer Kurve sind die Grössen $x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(m)i}$ Bestimmungszahlen des Linienelements m-ter Ordnung der Kurve, während das Kurvenelement durch die Ableitungen in einer Koordinate $x^n=z$

$$x^i, \frac{dx^a}{dz}, \frac{d^2x^a}{dz^2}, \dots, \frac{d^mx^a}{dz^m} \qquad (a=1, 2, \dots, n-1)$$

bestimmt wird. Ein Linienelement einer gewissen Ordnung bestimmt einziges Kurvenelement derselben Ordnung, aber einem Kurvenelement sind unendlichviele Linienelemente zugehörig. Da jedes System eines Linienelements 2-ter Ordnung und eines Anfangswerts des Parameters t eine Bahnkurve des Systems (1) bestimmt, so laufen durch ein Kurvenelement 2-ter Ordnung unendlichviele Bahnkurven. Wenn alle diese Kurven bis auf Parametrisierung stets übereinanderliegen, so sagt man, dass das System (1) die Eigenschaft Γ besitzt. Dafür ist es notwendig und hinreichend, dass die Beziehungen von der Form bestehen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta_1 H^i=3H^i+P_1 x^{(1)i}, & \Delta_2 H^i=-3x^{(2)i}+P_2 x^{(1)i}, \\ \partial_t H^i=P_0 x^{(1)i}, & \end{cases}$$

wo

$$(3) \qquad \Delta_1 f=f_{(1)j}x^{(1)j}+2f_{(2)j}x^{(2)j}, \qquad \Delta_2 f=f_{(2)j}x^{(1)j}$$

($f_{(r)j}=\partial f/\partial x^{(r)j}$) sind. Und das System der Bahnkurven (1) stimmt dann mit dem System aller Integralkurven eines Differentialgleichungssystem — assoziertes System — von der Gestalt

$$(4) \qquad \frac{d^3x^a}{dz^3}+f^a\left(x^\beta, z\,;\ \frac{dx^\beta}{dz}, \frac{d^2x^\beta}{dz^2}\right)=0 \qquad (a, \beta=1, 2, \dots, n-1)$$

überein.

---

1) H. Hombu, Die projektive Theorie eines Systems der „paths" höherer Ordnung I, Japanese Journ. of Math., **15** (1938), 139-196; II, Journ. Fac. Sc., Hokkaidō Imp Univ., (I) **7** (1938), 35-94.