108. Über modulare Verbände, welche die Untergruppen einer endlichen abelschen Gruppe bilden. I.

Von Eizi INABA.
Mathematisches Institut der Kaiserlichen Hokkaido Universität, Sapporo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1943.)

Alle Untergruppen einer Gruppe bilden bezüglich ihrer Vereinigung und Durchschnittbildung einen Verband, dessen charakteristischen Merkmale schwer zu finden sind. In der vorliegenden Note will ich die Definition eines Verbandes ohne Anlehnung an den Gruppenbegriff vornehmen und bestätigen, dass es mit mehreren Merkmalen des Verbandes aller Untergruppen einer endlichen abelschen Gruppe versehen ist.

Ein Element a aus einem Verband $\mathfrak{V}$ heisst *neutral*, wenn für zwei Elemente x, y aus $\mathfrak{V}$ stets die beiden Relationen

$$a \cup (x \cap y) = (a \cup x) \cap (a \cup y), \quad a \cap (x \cup y) = (a \cap x) \cup (a \cap y)$$

bestehen. Wenn $\mathfrak{V}$ Einselement e und Nullelement n besitzt, so heissen diese *uneigentlich neutral* und alle anderen neutralen Elemente *eigentlich neutral*. Nimmt man zwei Elemente b, c aus $\mathfrak{V}$ mit $b \leqq c$, so bilden alle Elemente zwischen b und c einen Teilverband von $\mathfrak{V}$. Dieser heisst nach Ore *Quotient* von $\mathfrak{V}$ und werde mit dem Symbol $\frac{c}{b}$ bezeichnet. Wir wollen einen modularen Verband $\mathfrak{V}$ *primär* nennen, wenn jeder Quotient von $\mathfrak{V}$ eine Kette oder ein Verband mit keinem eigentlichen neutralen Element ist. Der Verband der Untergruppen einer beliebigen kommutativen p-Gruppe G ist ein Exemplar dafür. In der Tat sei G nicht zyklisch und H ihre beliebige echte Untergruppe. Wenn H nicht zyklisch ist, wähle man ein beliebiges Element aus G, das zu H nicht gehört. Wenn H zyklisch ist, sei es ferner noch der Bedingung, $\{a\}$ nicht H enthält, unterworfen. Jedenfalls gilt dann $\{a\} \cap H < H$, $\{a\} \cap H < \{a\}$, und $\{a\} \cap H = \{a^{\nu}\}$ mit $\nu > 1$. Wählt man nun ein Element b aus H derart, dass b nicht zu $\{a\} \cap H$ gehört, so gilt $(\{a\} \cap H) \cup (\{ab\} \cap H) = \{a^{\nu}, b^{\nu}\}$, $(\{a\} \cup \{ab\}) \cap H = \{a^{\nu}, b\}$. Also ist H nicht neutral. Ein Verband soll ferner *halbprimär* heissen, wenn es direkte Vereinigung endlich vieler primären Verbände ist. Jeder Quotient eines halbprimären Verbandes ist offenbar halbprimär, und dergleichen gilt auch für das duale isomorphe Bild. Der Verband der Untergruppen einer endlichen abelschen Gruppe ist nun stets halbprimär, da es direkte Vereinigung der Verbände der Untergruppen von ihren Sylowschen Gruppen ist.[1] Ein halbprimärer oder primärer Verband endlicher Dimension soll im folgenden mit H^- bzw. P^- Verband bezeichnet werden. Zuerst ist zu bemerken, dass jede

---

1) Der halbprimäre Verband endlicher Dimension ist doch nicht im Stande, den Verband der Untergruppen einer abelschen Gruppe vollständig zu charakterisieren. Denn jener Verband ist nicht immer zu sich selbst dual isomorph.