

## 105. Über die Schreiersche Erweiterungstheorie.

Von Kenjiro SHODA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1943.)

Es seien  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{B}$  zwei Gruppen. Eine Gruppe  $\mathfrak{A}$  heisst bekanntlich eine Erweiterung von  $\mathfrak{N}$  durch  $\mathfrak{B}$ , wenn  $\mathfrak{A}$  die Gruppe  $\mathfrak{N}$  als Normalteiler enthält und, wenn die Faktorgruppe  $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$  zu  $\mathfrak{B}$  isomorph ist. Wir werden eine allgemeine Methode angeben solche Erweiterungen zu konstruieren unter der Voraussetzung, daß  $\mathfrak{B}$  als eine durch  $E = \{b_1, b_2, \dots\}$  erzeugte freie Gruppe mit dem Relationensystem  $R$  vorgegeben ist<sup>1)</sup>.

Man bilde zunächst das freie Produkt  $\mathfrak{M}$  von  $\mathfrak{N}$  und  $E$ , oder was dasselbe ist, das freie Produkt von  $\mathfrak{N}$  mit der durch  $E$  erzeugten freien Gruppe  $\mathfrak{B}^{*2)}$ . Jedem erzeugenden Element  $b_i$  ordnen wir je einen Automorphismus von  $\mathfrak{N}$  zu, der  $a$  aus  $\mathfrak{N}$  auf  $a^{\beta_i}$  abbildet. Setzt man in  $\mathfrak{M}$  die Relationen  $b_i^{-1}ab_i = a^{\beta_i}$  voraus, so erhält man eine Faktorgruppe  $\mathfrak{M}^*$  von  $\mathfrak{M}$ .

$\mathfrak{M}^*$  ist zu  $\mathfrak{N}^*\mathfrak{B}^*$  isomorph, wobei  $\mathfrak{N}^*$  ein zu  $\mathfrak{N}$  isomorpher Normalteiler von  $\mathfrak{M}^*$  und der Durchschnitt  $\mathfrak{N}^* \cap \mathfrak{B}^*$  die Einheitsgruppe  $\mathfrak{E}$  ist. Denn das Holomorph von  $\mathfrak{N}$  mit Hilfe der durch den Automorphismen  $\beta_i$  erzeugten Gruppe ist ersichtlich zu  $\mathfrak{M}^*$  homomorph. Also besitzt  $\mathfrak{M}^*$  einen zu  $\mathfrak{N}$  isomorphen Normalteiler  $\mathfrak{N}^*$ . Identifiziert man  $\mathfrak{N}^*$  zu 1, so reduziert sich  $\mathfrak{M}^*$  auf  $\mathfrak{B}^*$ . Daher ist  $\mathfrak{M}^*/\mathfrak{N}^*$  zu  $\mathfrak{B}^*$  isomorph und das Bild von  $\mathfrak{B}^*$  bei der homomorphen Abbildung von  $\mathfrak{M}$  auf  $\mathfrak{M}^*$  ist eine Vertretergruppe von  $\mathfrak{M}^*/\mathfrak{N}^*$ .

$E_s$  sei nun  $\mathfrak{A}$  eine Erweiterung von  $\mathfrak{N}$  durch  $\mathfrak{B}$ . Sind  $\bar{E} = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots\}$  die Vertreter der erzeugenden Elemente von  $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ , so ist  $F(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots)$  ein Element  $a_F$  von  $\mathfrak{N}$ , wenn  $F(b_1, b_2, \dots)$  eine Relation von  $\mathfrak{B}$  ist. Dann sind ersichtlich

$$\begin{aligned} 1) \quad & F(\bar{b})G(\bar{b}) = a_F a_G \\ 2) \quad & \bar{b}_i^{-1}F(\bar{b})\bar{b}_i = a_F^{\beta_i} \\ 3) \quad & F(\bar{b})^{-1}a_F F(\bar{b}) = a_F^{-1}a a_F. \end{aligned}$$

Dabei bedeuten  $F, G$  Relationen von  $\mathfrak{B}$ ;  $\beta_i$  den durch  $\bar{b}_i$  bewirkten Automorphismus von  $\mathfrak{N}$ ;  $a$  ein Element aus  $\mathfrak{N}$ .

In  $\mathfrak{M}^*$  identifizieren wir  $\mathfrak{N}^*$  mit  $\mathfrak{N}$  und die erzeugenden Elemente von  $\mathfrak{B}^*$  bezeichnen wir mit  $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots\}$ . Der durch  $\bar{b}_i$  bewirkte Automorphismus von  $\mathfrak{N}$  sei  $\beta_i$ . Dann besagen die Bedingungen 1), 2), daß die Elemente  $a^F$  eine Untergruppe  $\mathfrak{N}'$  von  $\mathfrak{N}$  bilden, die zum aus den sämtlichen Relationen  $F(b)$  bestehenden Normalteiler  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{B}$  operatorhomomorph ist. Dabei betrachten wir als den Operatorbereich die

1) Vgl. etwa H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie, (1937), 89-93.

2) Vgl. K. Shoda, Über die allgemeinen algebraischen Systeme I, Proc. **17** (1941), 323-327.