14. *Sur la réductibilité du groupe d'holonomie. I. Les espaces à connexion affine.*

Par Makoto ABE.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Feb. 12, 1944.)

La connexion affine d'un espace de Riemann se caractérise par les deux propriétés suivantes:

1° Qu'elle soit sans torsion,

2° Que la forme métrique fondamentale donnée

$$ds^2 = g_{ij}du^i du^j$$

se conserve par le transport parallèle au sens de cette connexion. Supposons réciproquement qu'une connexion affine sans torsion soit donnée d'avance dans une variété E à n dimensions. Alors se posent les questions suivantes:

Est-il possible de définir cette connexion par une métrique riemannienne?

S'il en est ainsi, quelle est la métrique la plus générale qui définit cette connexion?

Si $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$ est une telle métrique, elle se détermine en chaque point de la variété E, dès qu'elle est définie au point origine O (d'ailleurs arbitrairement choisi); on n'a qu'à la transporter par parallélisme le long d'un chemin allant de O au point arbitraire P de E. Mais, pour que le résultat soit indépendent du choix d'un chemin suivi, la métrique définie au point O doit se conserver quand on la transporte le long d'un contour fermé arbitraire partant de O et y revenant. Autrement dit, la forme quadratique doit être invariante par le groupe d'holonomie[1)] g associé au point O, ou plus exactement, par le groupe des substitutions linéaires homogènes γ[1)] (homomorphe à g) que les déplacements affines du groupe g effectuent sur les vecteurs issus de O. Réciproquement, chaque forme invariante par γ peut être transporté de O en tout point de E et la métrique riemannienne ainsi obtenue définit à son tour la connexion affine donnée, parce que celle-ci est uniquement déterminée par les conditions 1° et 2°.

La connexion donnée peut être donc définie par une métrique riemannienne, si et seulement si γ *est* (*équivalent à*) *un groupe des transformations orthogonales.* De plus, le problème de chercher la métrique la plus générale définissant cette connexion est ainsi réduit au problème d'Algèbre de *déterminer la forme quadratique la plus générale invariante par le groupe* γ. Si γ est irréductible, une telle forme est déterminée uniquement à un facteur constant près; si γ est réductible, le résultat sera plus compliqué. Mais pour étudier les questions de cette nature, il importe d'abord d'examiner plus généralement:

1) E. Cartan: Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la Relativité généralisée, Deuxième Partie, Ann. Ec. Norm. (3) 42 (1925), p. 17-88. Chap. VI.