

88. Ein Satz über die p -wertigen Funktionen.

Von Tokunosuke YOSIDA.

Marineingenieurschule.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., July 12, 1944.)

Neuerdings haben wir den folgenden Satz¹⁾ bewiesen :

$$w(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \dots + a_n z^n + \dots$$

sei in $|z| < 1$ regulär und p -wertig. Dann ist für $|z| < 1$

$$|w(z)| \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p \frac{|z|^p}{(1+|z|)^{2p}}.$$

Nun haben wir eine bessere Abschätzung. Es ist für $|z| < 1$

$$|w(z)| \geq \left(\frac{1}{1.0617}\right)^p \frac{|z|^p}{(1+|z|)^{2p}}. \quad (1)$$

Beweis. Es sei $(w(z))^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n + \dots$, so ist $b_0 = -\frac{a_{p+1}}{p}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \leq 1^2$. Andererseits ist $|a_{p+1}| \leq 2p^2$.

Daher ist $|b_0| \leq 2$, und für $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n-1} \right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{2n-2}}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{2n-2}}{n} \leq \log 4.$$

Damit ist für $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\left| 1 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n+1} \right| \leq 1 + 2|z| + |z|^2 \sqrt{\log 4} \leq (1.0617)(1+|z|)^2.$$

Folglich besteht (1) für $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Insbesondere gilt es für $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|w(z)| \geq \left(\frac{|z|}{1 + 2|z| + |z|^2 \sqrt{\log 4}} \right)^p \geq \left(\frac{1}{4.2468} \right)^p.$$

Da $(w(z))^{\frac{1}{p}}$ ist in $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ schlicht²⁾ und $w(z)$ ist in $|z| < 1$ p -wertig, so ist für $1 > |z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|w(z)| \geq \left(\frac{1}{4.2468}\right)^p > \left(\frac{1}{1.0617}\right)^p \frac{|z|^p}{(1+|z|)^{2p}}.$$

Schliesslich ist unser Satz vollständig bewiesen worden.

1) T. Yosida, Proc. **20** (1944).

2) Cf. loc. cit.