120. Über die allgemeinen algebraischen Systeme, VIII*).

Von Kenjiro SHODA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 12, 1944.)

§ 23 *Lineare Systeme.* Ein A-algebraisches System $\mathfrak{A}$ heisst *linear*, wenn die lineare Abhängigkeit in $\mathfrak{A}$ definiert ist. Ist E ein mit $\mathfrak{A}$ äquivalentes[1] System der linear unabhängigen Elementen aus $\mathfrak{A}$, so ist jedes Element aus $\mathfrak{A}$ von E linear abhängig, also ist $\mathfrak{A}$ das durch E erzeugte freie System. Ein durch endlich viele Elemente erzeugtes freies System ist, wie man sich leicht überzeugt, dann und nur dann linear, wenn es die Eigenschaft besitzt, daß jedes Untersystem $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ stets durch jedem maximalen unabhängigen Teilsystem des Erzeugendensystems von $\mathfrak{A}'$ schon erzeugt wird. Es ist auch eine unmittelbare Folgerung, daß die Anzahl $m > 0$ der unabhängigen Erzeugenden eines echten Untersystems $\mathfrak{A}'$ kleiner als der von $\mathfrak{A}$ ist. Also ist kein echtes Untersystem $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{A}$ isomorph. Ist $m=0$, so besteht $\mathfrak{A}'$ nach der Definition der linearen Abhängigkeit aus einem einzigen Element, welches offenbar Nullelement ist. Ein lineares System besitzt also höchstens nur ein Nullelement und jedes andere Element erzeut ein freies System. Ein lineares System besitzt dann und nur dann kein von Null verschiedenes echtes Untersystem, wenn es durch ein einziges Element erzeugt ist.

Ist $\mathfrak{A}$ ein durch $a \neq 0$ erzeugtes lineares System, so erzeugt jedes Element $b \neq 0$ aus $\mathfrak{A}$ auch das ganze System $\mathfrak{A}$ und die Abbildung von a auf b induziert einen Automorphismus f_b von $\mathfrak{A}$: $b=f_b(a)$[2]. Daher kann man $\mathfrak{A}$ als ein durch a erzeugtes System mit Operatoren f_b auffassen. Nach der Definition der Verknüpfungen $(f_b \alpha f_c)(a) = f_b(a)\alpha f_c(a)$ bilden die Operatoren ein zu $\mathfrak{A}$ isomorphes A-algebraisches System K, in dem noch eine andere assoziative Verknüpfung — Multiplikation $f_b f_c(a) = f_b\big(f_c(a)\big)$ — definiert ist[3]. Dabei gilt der linksseitige Distributivgesetz: $f_b(f_c \alpha f_d) = f_b f_c \alpha f_b f_d$. Man beachte, daß diese Defiinition der Verknüpfung zwischen den Operatoren hängt von der Wahl des Erzeugendes a ab. Die Abbildung von a auf das Nullelement ist ein Nullelement 0 von K und $0f_b = f_b 0 = 0$. Die identische Abbildung ist das Einselement 1 der Gruppe G aller von Null verschiedenen Elemente aus K. K besitzt kein echtes von Null verschiedenes normales Untersystem. Denn jedes normales Untersystem enthält O und folglich mit $a \neq 0$ auch alle Elemente aus K, da $0x=0$ und $ax=b$ für jedes b lösbar ist.

---

*) I-VII in Proc. **17** (1941), 323-327; **18** (1942), 179-184, 227-232, 276-279; **19** (1943), 120-124, 259-263, 515-517.

1) Zwei Untermengen heissen äquivalent, wenn eins von der andern algebraisch abhängig ist und umgekehrt.

2) Wir gebrauchen hier die Schreibweise $f(a)$ statt a^f.

3) Vgl. die allgemeinen Verknüpfungen der Abbildungen in § 25.