113. Sur les anneaux des opérateurs, II.

Par Masae ORIHARA.

L'institut mathématique, l'université impériale de Kyusyu, Fukuoka.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1944.)

1. Dans la note précédente[1], nous avons recherché des anneaux $\mathcal{M}$ des opérateurs linéaires et bornés sur l'espace $\mathfrak{H}$ hilbertien général et nous avons donné la trace sur les opérateurs et discuté ses propriétés quand $\mathcal{M}$ n'est pas le facteur. Dans cette note, nous considerons d'abord sur la relation entre l'équivalence par rapport à un opérateur unitaire défini dans la note précédente et celle par rapport à un opérateur isométrique partiellement de MM. F. J. Murray et J. v. Neumann. De plus, nous définissons un idéal pour un sous-ensemble de $\mathcal{M}$ et l'appelons maximal quand un idéal $\mathfrak{J}$ n'est pas contenu à autre idéal. Alors, chaque opérateur A de $\mathcal{M}$ peut être représentée qui est comme une fonction $\varphi_A[\mathfrak{J}]$ définie sur l'ensemble $\mathfrak{F}$ de tous les idéaux $\mathfrak{J}$ maximaux et sa valeur à $\mathfrak{J}$ est un élément de la classe $\mathcal{M}(\mathfrak{J})$ residuelle. De plus, la classe $\mathcal{M}(\mathfrak{J})$ residuelle est irreducible. En particulier, quand $\mathcal{M}$ est du type fini, puisque les traces de la classe $\mathcal{M}(\mathfrak{J})$ residuelle sont unique, Il existe entre $\mathcal{M}^H$ et un sous-ensemble de l'espace de toutes les fonctions réels sur $\mathfrak{F}$ un homomorphism qui conserve la linearité et l'ordre des éléments. Et, nous pouvons conduire une topologie à $\mathfrak{F}$ de manière que ces fonctions réels sont continue sur $\mathfrak{F}$. Puis, pour un sous-espace linéaire et fermé tel que $\mathfrak{M}\eta\mathcal{M}$, nous pouvons définir la dimension $D(\mathfrak{M})$ comme la trace $T(P_{\mathfrak{M}})$ de la projection de $\mathfrak{M}$.

2. Soient $\mathfrak{H}$ l'espace hilbertien général, $\mathcal{B}$ l'ensemble tous les opérateurs linéaires et bornés sur $\mathfrak{H}$ et $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$ un sous-anneau des opérateurs[2].

Nous posons $Z\eta\mathcal{M}$ pour un opérateur linéaire Z de $\mathfrak{H}$, quand nous avons $UZU^*=Z$ pour tous les opérateurs unitaires U de $\mathcal{M}'$. Alors, $Z\eta\mathcal{M}$ et $Z\in\mathcal{M}$ sont équivalents l'un l'autre pour tout élément Z de $\mathcal{B}$[3].

Puis, nous écrivons $\mathfrak{M}\eta\mathcal{M}$ quand un ensemble fermé et linéaire $\mathfrak{M}$ est invariant pour les opérateurs unitaires U de $\mathcal{M}'$; c'est-à-dire $U\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$. Alors, pour que nous ayons $\mathfrak{M}\eta\mathcal{M}$, il faut et il suffit que $P_{\mathfrak{M}}\in\mathcal{M}$.

3. Dans la note précédente, nous avons désigné par $A\cong B$ s'il y a pour A et $B\in\mathcal{M}$ un opérateur U de $\mathcal{M}^U$ tel que $UAU^*=B$. Cette relation est symétrique, réflexive et transitive, de plus $A\cong B$ entraine $\alpha A\cong\alpha B$ pour chaque nombre complexe α. D'ailleurs, nous avons pour la relation entre l'additivité et la congruence des projections.

Lemme 1. $P_{\mathfrak{M}_i}, P_{\mathfrak{N}_i}\in\mathcal{M}$, $P_{\mathfrak{M}_i}\cong P_{\mathfrak{N}_i}$ $(i=1,2)$, $P_{\mathfrak{M}_1}\perp P_{\mathfrak{M}_2}$ et $P_{\mathfrak{N}_1}\perp P_{\mathfrak{N}_2}$ *entrainent* $P_{\mathfrak{M}_1}+P_{\mathfrak{M}_2}\cong P_{\mathfrak{N}_1}+P_{\mathfrak{N}_2}$.

---

1), 2) M. Orihara, Sur les anneaux des opérateurs, I. Proc. **20** (1944), 399.

3) F. J. Murray and J. v. Neumann, On Rings of Operators, Ann. of Math. **37** (1936), Lemma 4.2.1.