Résolubilité du problème de Cauchy pour certains opérateurs du type de Schrödinger

Par Jiro TAKEUCHI*)

(Communicated by Kiyosi ITÔ, M. J. A., April 13, 1998)

1. Introduction et énoncé des résultats. 1.1. On considère l'opérateur de 2-évolution au sens de Petrowsky [20]:

(1.1) $$P(x, D_x, D_t) = D_t^m + a_1(x, D_x)D_t^{m-1} + \cdots + a_m(x, D_x),\ (x, t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^1$$

avec

$$a_j(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq 2j} a_{\alpha j}(x) D_x^\alpha \ (1 \leq j \leq m),\quad a_{\alpha j}(x) \in \mathscr{B}^\infty(\boldsymbol{R}^n),$$

$$D_t = -i\partial/\partial t,\ D_x = (D_1, \cdots, D_n),\quad D_j = -i\partial/\partial x_j\ (1 \leq j \leq n).$$

On suppose que le symbole principal $P_{2m}(\xi, \tau)$ de l'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ au sens de Petrowsky [20] est à coefficients constants:

(1.2) $$P_{2m}(\xi, \tau) = \tau^m + \sum_{j=1}^m a_j^0(\xi)\tau^{m-j},$$

$$a_j^0(\xi) = \sum_{|\alpha|=2j} a_{\alpha j}\xi^\alpha\ (1 \leq j \leq m).$$

On note aussi, pour $k \geq 1$,

(1.3) $$P_{2m-k}(x, \xi, \tau) = a_1^k(x, \xi)\tau^{m-1} + \cdots + a_m^k(x, \xi),$$

(1.4) $$a_j^k(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=2j-k} a_{\alpha j}(x)\xi^\alpha$$

en admettant que $a_j^k(x, \xi) \equiv 0$ lorsque $2j - k < 0$.

En particulier $P_{2m-1}(x, \xi, \tau)$ est le symbole sous-principal de $P(x, D_x, D_t)$ au sens de Petrowsky [20]. Notons que $P_{2m}(\xi, \tau)$ et $P_{2m-k}(x, \xi, \tau)$ sont quasi-homogènes de degré $2m$ et $(2m - k)$ en (ξ, τ) de poids (1,2) au sens suivant:

$$P_{2m}(r\xi, r^2\tau) = r^{2m}P_{2m}(\xi, \tau),\ P_{2m-k}(x, r\xi, r^2\tau) = r^{2m-k}P_{2m-k}(x, \xi, \tau),\ r \in \boldsymbol{R}.$$

Nous allons donner des conditions afin que le problème de Cauchy pour le futur et pour le passé en même temps

$$(*)\ \begin{cases} P(x, D_x, D_t)u(x, t) = f(x, t) \text{ sur } \boldsymbol{R}^n \times [-T, T], \\ D_t^{j-1}u(0, x) = g_j(x) \text{ dans } \boldsymbol{R}^n\ (j = 1, \ldots, m) \end{cases}$$

soit bien posé dans $C^m([-T, T]; H^\infty(\boldsymbol{R}^n))$.

On impose la condition suivante:

Condition (A.1). Les racines caractéristiques en τ de $P_{2m}(\xi, \tau)$ sont réelles pour $\xi \in \boldsymbol{R}^n$.

On dit alors que l'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ est de type de Schrödinger. Remarquons que la condition (A.1) est nécessaire pour que le problème de Cauchy ($*$) soit bien posé dans $C^m([-T, T]; H^\infty(\boldsymbol{R}^n))$ même si les coefficients de P_{2m} dépendent de x.

Lorsque les racines caractéristiques sont simples, Takeuchi [23] a donné des conditions suffisantes et des conditions nécessaires de résolubilité du problème de Cauchy ($*$) dans les espaces de Sobolev. Dans cette Note, nous supposons que les racines caractéristiques sont multiples et de multiplicités constantes doubles; nous proposons des conditions analogues à la condition de Levi (Levi [12], A. Lax [9], Yamaguti [26], Mizohata-Ohya [15] et [16], Gourdin [6] etc.) et à la condition de bonne décomposition d'opérateurs (Ohya [17], Leray-Ohya [11], Vaillant [24] Matsuura [13], De Paris [3], Chazarain [1] etc.) dans le cas hyperbolique pour les opérateurs Kowalewskiens; notre formulation est analogue à celle de Mizohata-Ohya ([15], [16]).

On impose les conditions suivantes:

Condition (A.2). (i) Le symbole principal $P_{2m}(\xi, \tau)$ admet dans $\mathbf{C}[\xi, \tau]$ la décomposition en facteurs premiers $H_s(\xi, \tau)$ $(s = 0, 1)$, moniques en τ, notée

$$P_{2m}(\xi, \tau) = [H_0(\xi, \tau)]^2 H_1(\xi, \tau);$$

(ii) il existe deux entiers positifs m_0 et m_1 tels que $m_0 + m_1 = m$, $1 \leq m_0 \leq m_1$ et les polynômes $H_0(\xi, \tau)$ et $H_1(\xi, \tau)$ sont quasi- homogènes de degrés $2m_0$ et $2(m_1 - m_0)$ en (ξ, τ) de poids (1,2).

Condition (A.3). Les racines caractéristiques $\lambda_j^0(\xi)$ $(1 \leq j \leq m_1 = m - m_0)$ en τ du

---

Dédié à Professeur Jean Vaillant à l'occasion de son soixante-cinquième anniversaire.

*) 30–183, Katagihara-Takoden-cho, Nishikyo-ku, Kyoto 615–8161, Japan.