Une Note sur les Topologies Linéaires

By Mohamed TABAÂ

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Rabat, Maroc

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., May 12, 1997)

1. Introduction. Dans toute la suite, A désigne un anneau commutatif unitaire intègre, K son corps des fractions, A' sa clôture intégrale, A^* sa quasi-clôture intégrale, $P(A) = \mathrm{Spec}(A) - \{0\}$, $P_1(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de A et $\mathrm{Max}(A)$ l'ensemble de ses idéaux maximaux.

On désigne par τ_A la topologie linéaire sur K qui admet pour système fondamental de voisinages de 0 les idéaux non nuls de A ; si $p \in P(A)$, on notera τ_p la topologie τ_{A_p}.

Rappelons deux définitions:

a) A est dit *h-semi-local* si, pour tout idéal propre a de A, l'anneau A/a est semi-local.

b) A est dit *topologiquement prüférien* si, pour tout $p \in P(A)$, la topologie τ_p est définie par une valuation de K.

Dans cette Note nous montrons que, si A est topologiquement prüférien h-semi-local, alors:

1) A^* est un anneau de Prüfer h-semi-local de dimension ≤ 1, et l'application $n \rightarrow n \cap A$ de $\mathrm{Max}(A^*) - \{0\}$ dans $P_1(A)$ est bijective; ce résultat généralise le théorème 1.8 de [1] et le corollaire 9 de [6];

2) Toute topologie de corps A-linéaire séparée non discrète sur K, est borne surpérieure de topologies τ_m ($m \in \mathrm{Max}(A)$).

Comme application de ces deux résultats, nous obtenons une généralisation du théorème 2.14 de [1].

2. Résultats. Si U est une partie de K, on désigne par $\mathfrak{f}_U$ le sous-A-module de K formé des $x \in K$ tel que $xU \subset A$.

Lemme 1. Si τ_A est définie par une valuation de K, alors, pour tout sous-A-module M de K tel que $M \neq K$, on a $\mathfrak{f}_M \neq 0$.

Preuve. Soient V un anneau de valuation de K tel que $\tau_A = \tau_V$, et $x \in K - M$. Montrons que $(\mathfrak{f}_V)^2 \subset x\,\mathfrak{f}_M$; en effet, on a $(\mathfrak{f}_V)VM \subset M$, donc $xV \not\subset (\mathfrak{f}_V)VM$, mais V est un anneau de valuation, donc $(\mathfrak{f}_V)VM \subset xV$; d'où $(\mathfrak{f}_V)^2M \subset xA$, et par suite $(\mathfrak{f}_V)^2 \subset x\,\mathfrak{f}_M$. Le lemme découle de cette inclusion et du fait que $\mathfrak{f}_V \neq 0$.

Corollaire 1. On suppose τ_A définie par une valuation de K. S'il existe un sous-A-module M de K ouvert pour une topologie d'anneau τ sur K et tel que $M \neq K$, alors τ_A est moins fine que τ.

Preuve. D'après le lemme précédent, il existe $d \neq 0$ tel que $dM \subset A$; le corollaire découle du fait que pour tout $a \neq 0$ l'homothétie $x \rightarrow ax$ est un homéomorphisme de K sur lui-même.

On désigne par $L_r(A)$ (resp. $L_f(A)$) l'ensemble des topologies d'anneau (resp. de corps) A-linéaires séparées non discrètes sur K, et $\mathfrak{R}(A)$ le radical de A.

D'après [2, chap. 6 §5 exer. 1], $\tau_A \in L_r(A)$, et $\tau_A \in L_f(A)$ si et seulement si $\mathfrak{R}(A) \neq 0$.

Le résultat suivant donne une caracterisation (topologique) des anneaux étudiés dans [4].

Proposition 1. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) τ_A est définie par une valuation de K.

2) $L_r(A)$ est réduit à un seul élément.

3) $\mathfrak{R}(A) \neq 0$ et $L_f(A)$ est réduit à un seul élément.

Preuve. 1)$\Rightarrow$2). Si $\tau \in L_r(A)$, il est clair que τ est moins fine que τ_A et d'après le corollaire précédent τ_A est moins fine que τ, d'où $\tau = \tau_A$.

2)$\Rightarrow$3). Si $A \subset B$ est un sous-anneau local de K tel que $B \neq K$, alors $\tau_A = \tau_B$ donc $\tau_A \in L_f(A)$ et par suite $\mathfrak{R}(A) \neq 0$. La dernière assertion est claire.

3)$\Rightarrow$1). On a $\tau_A \in L_f(A)$, et d'après [2, chap. 6 § 1 n°2 th. 2] il existe un anneau de valuation V de K tel que $A \subset V$ et $V \neq K$, d'où $\tau_A = \tau_V$.

De cette proposition découle immédiatement la proposition 1.5 de [1].

Remarque. Let anneaux vérifiant les propriétés équivalentes de la proposition précédente sont caractérisés dans ([2, chap. 6 §5 exer. 3b)],[9, prop. 1]) pour les anneaux noethériens, et dans [11, chap. 1 prop. 2] pour les anneaux de