Structure and Orbits of Certain Prehomogeneous Vector Spaces Related with Orthogonal Roots

By Iris MULLER

Institut de Recherches Mathématiques Avancées, U.A. 001 du C.N.R.S. Université Louis Pasteur

(Communicated by Kiyosi ITÔ, M. J. A., May 13, 1996)

Abstract: We define a particular class of prehomogeneous vector spaces of parabolic type, in relation with orthogonal roots, on a field of characteristic 0. When the field is algebraically closed, this class contains all prehomogeneous vector spaces of parabolic type, irreducible, regular and reduced for which the conormal bundles of all the orbits are good holonomic varieties, and in general all prehomogeneous vector spaces of parabolic type, commutative and regular. To these prehomogeneous, we associate a root system and give the structure and orbits in term of this root system and certain quadratic forms, for a local or global field of characteristic 0.

1. Notations et définitions. Soit $\boldsymbol{F}$ un corps de caractéristique 0 et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple $\boldsymbol{Z}$-graduée définie sur $\boldsymbol{F} : \mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \boldsymbol{Z}} \mathfrak{g}_i$. On note H_0 l'unique élément de $\mathfrak{g}_0$ tel que pour tout j on ait $ad(H_0) / \mathfrak{g}_j = jId_{\mathfrak{g}_j}$. B est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

G_e désigne le groupe des automorphismes élémentaires de $\mathfrak{g}_0$ et $Aut_0(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui sont élémentaires sur une clôture algébrique de $\boldsymbol{F}$.

On rappelle que le groupe G, centralisateur de H_0 dans $Aut_0(\mathfrak{g})$ opère sur $\mathfrak{g}_1$ et que le triplet $(G, \mathfrak{g}_1, Ad)$, noté ici $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$, est un espace vectoriel préhomogène de type parabolique ([6]).

Si x est un élément non nul de $\mathfrak{g}_1$, il existe $h \in \mathfrak{g}_0$ et $y \in \mathfrak{g}_{-1}$ tels que (x, h, y) soit un sl_2-triplet. Les éléments h qui apparaissent ainsi sont dits 1-*simples* et les sl_2-triplets 1-adaptés ([2], [4]). A tout élément h 1-*simple* on associe l'algèbre $\mathfrak{g}(h)$, partie semi-simple de l'algèbre (réductive) engendrée par les sous-espaces propres de $ad(h)$ de valeur propre 2 dans $\mathfrak{g}_1$ et de valeur propre -2 dans $\mathfrak{g}_{-1}$.

Définition 1. *Un élément h 1-simple est dit 1-simple minimal si et seulement si $\mathfrak{g}(h)$ est de $\boldsymbol{F}$-rang un.*

Définition 2. $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ *est dit*

1) *Faiblement commutatif si et seulement si il existe n éléments 1-simples minimaux, commutants deux à deux, deux à deux orthogonaux pour B, de somme $2H_0$.*

2) *Presque commutatif si et seulement si il existe n sl_2-triplets 1-adaptés $(x_i, h_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ commutants deux à deux, tels que pour tout i, h_i soit 1-simple minimal et $\sum_{1 \leq i \leq n} h_i = 2H_0$.*

3) *Quasi commutatif si et seulement si il existe n éléments 1-simples minimaux $(h_i)_{1 \leq i \leq n}$ de somme $2H_0$ tels que les algèbres $\mathfrak{g}(h_i)$ et $\mathfrak{g}(h_j)$ commutent pour $1 \leq i \neq j \leq n$.*

Les préhomogènes de type parabolique, commutatifs (i.e. $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ pour $i \geq 2$) et réguliers sont quasi-commutatifs. Lorsque $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C}$, ce résultat figure dans [5].

2. Structure des préhomogènes faiblement commutatifs et classification. $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est un préhomogène faiblement commutatif, on note $h_1, \dots, h_n$ les éléments 1-simples minimaux ayant les propriétés énoncées dans le 1) de la définition 2. $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre abélienne, déployée, maximale de $\mathfrak{g}$ contenant la sous-algèbre $\mathfrak{b} = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \boldsymbol{F} h_i$ et Δ est le système de racines associé, que l'on gradue également $(\Delta_i = \{\lambda \in \Delta / \lambda(H_0) = i\})$; on choisit un ordre sur Δ pour lequel toute racine de $\cup_{i \geq 1} \Delta_i$ est positive. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les racines de Δ_1 de co-racines respectives $h_1, \dots, h_n$.

Par analogie avec la définition 1, une racine λ de Δ_1 est dite 1-minimale si et seulement si la co-racine h_λ est 1-simple minimale. Les racines simples appartenant à Δ_1 sont 1-minimales.

On note s_λ (resp. $\mathfrak{g}^\lambda$) la symétrie (resp. le sous-espace radiciel) correspondant à la racine λ.

Lemme 3. 1) *Δ_i est vide pour $i \geq 3$.*

2) *Toute racine de Δ_2 est somme de deux racines de*