

67. Compacité linéaire et lemme de Hensel

Par Mohamed TABAÂ

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Rabat, Maroc

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Oct. 12, 1993)

Soient A un anneau commutatif unitaire et \mathfrak{R} son radical. L'anneau A est dit *hensélien* si, pour tout polynôme unitaire f de $A[X]$ et toute décomposition de son image \hat{f} dans $(A/\mathfrak{R})[X]$ en produit $\hat{f} = GH$ de polynômes étrangers unitaires, il existe deux polynômes unitaires g, h de $A[X]$ d'images respectives G, H tels que $f = gh$. Les notations f, G, H garderont ce sens dans toute la suite.

Dans cette Note nous démontrons le

Théorème. Si A est un anneau linéairement compact pour la topologie discrète alors A est hensélien.

Démonstration. Soit \mathfrak{F} l'ensemble des couples $(g + \alpha A[X], h + \alpha A[X])$ où g et h sont des polynômes unitaires de $A[X]$ tels que $\bar{g} = G, \bar{h} = H, f - gh \in \alpha A[X]$ et α est un idéal de A contenu dans \mathfrak{R} . $\mathfrak{F} \neq \emptyset$; on l'ordonne par

$$(g_1 + \alpha_1 A[X], h_1 + \alpha_1 A[X]) \leq \begin{cases} g_2 + \alpha_2 A[X] \subseteq g_1 + \alpha_1 A[X] \\ \text{et} \\ h_2 + \alpha_2 A[X] \subseteq h_1 + \alpha_1 A[X] \end{cases} \Leftrightarrow (g_2 + \alpha_2 A[X], h_2 + \alpha_2 A[X])$$

Montrons que \mathfrak{F} est inductif. Soit $(g_\lambda + \alpha_\lambda A[X], h_\lambda + \alpha_\lambda A[X])_\lambda$ une famille totalement ordonnée d'éléments de \mathfrak{F} ; écrivons

$$g_\lambda = \sum_{i=0}^{i=r-1} a_{\lambda,i} X^i + X^r \text{ et } h_\lambda = \sum_{j=0}^{j=s-1} b_{\lambda,j} X^j + X^s,$$

où $r = \deg(G)$ et $s = \deg(H)$; donc pour $0 \leq i \leq r-1$ et $0 \leq j \leq s-1$, $(a_{\lambda,i} + \alpha_\lambda)_\lambda$ et $(b_{\lambda,j} + \alpha_\lambda)_\lambda$ sont des bases de filtre formées de variétés linéaires affines de A ; et comme A est linéairement compact pour la topologie discrète il existe $a_i \in A$ et $b_j \in A$ tels que $a_i - a_{\lambda,i} \in \alpha_\lambda$ et $b_j - b_{\lambda,j} \in \alpha_\lambda$ pour tout λ ; on pose

$$g = \sum_{i=0}^{i=r-1} a_i X^i + X^r, h = \sum_{j=0}^{j=s-1} b_j X^j + X^s \text{ et } \alpha = \bigcap \alpha_{\lambda,j}.$$

$(g + \alpha A[X], h + \alpha A[X]) \in \mathfrak{F}$ car $f - gh = (f - g_\lambda h_\lambda) + h_\lambda (g_\lambda - g) + g (h_\lambda - h) \in \alpha_\lambda A[X]$ pour tout λ , et il majore tous les éléments de la famille. Soit alors $(g_0 + \alpha_0 A[X], h_0 + \alpha_0 A[X])$ un élément maximal de \mathfrak{F} ; montrons que $f = g_0 h_0$; le polynôme $f - g_0 h_0 \in \alpha_0 A[X]$, donc il s'écrit $f - g_0 h_0 = \sum c_i X^i$, où $0 \leq i \leq n-1$, $n = \deg(f)$ et $c_i \in \alpha_0$; d'autre part G et H sont étrangers et unitaires donc, pour tout $0 \leq i \leq n-1$, X^i s'écrit $X^i = u_i g_0 + v_i h_0 + w_i$, où u_i, v_i et w_i sont des polynômes de $A[X]$ tels que $\deg(v_i) \leq r-1$, $\deg(u_i) \leq s-1$ et $w_i \in \mathfrak{R} A[X]$; on pose, comme dans [3, (30.4)], $g' = g_0 + \sum c_i v_i$, $h' = h_0 + \sum c_i u_i$, et soit $\mathfrak{b} = \sum c_i$; le couple $(g' + \mathfrak{b} \mathfrak{R} A[X], h' + \mathfrak{b} \mathfrak{R} A[X]) \in \mathfrak{F}$, car $\deg(\sum c_i v_i) \leq r-1$, $\deg(\sum c_i u_i)$