43. *Le problème de Cauchy pour certaines équations aux dérivées partielles du type de Schrödinger, X; symétrisations indépendantes du temps*

Par Jiro TAKEUCHI

College of Industrial Technology, Japan et Université de Paris-VI, France
(Communicated by Kiyosi ITÔ, M. J. A., June 8, 1993)

Résumé. Cette Note donne des conditions impliquant que le problème de Cauchy, pour certains opérateurs du type de Schrödinger au sens de la 2-évolution de Petrowsky, soit bien posé dans L^2. Ces conditions signifient qu'on peut réduire cet opérateur en un système diagonal qui est symétrisable par un opérateur pseudo-différentiel, indépendant du temps, borné et inversible dans L^2.

1. Introduction et énoncé des résultats. Soit un opérateur différentiel

$$P(x, D_x, D_t) = D_t^m + a_1(x, D_x)D_t^{m-1} + \cdots + a_m(x, D_x), \ (x, t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^1,$$

où $D_t = -i\partial/\partial t$, $D_x = (D_1, \cdots, D_n)$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$,

$$a_j(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq 2j} a_{\alpha j}(x) D_x^\alpha \quad (1 \leqq j \leqq m),$$

dont les coefficients $a_{\alpha j}(x)$ sont des fonctions $\mathcal{B}^\infty$ dans $\boldsymbol{R}^n$ à valeurs complexes.

Nous allons donner des conditions pour que le problème de Cauchy

$$(*) \quad \begin{cases} P(x, D_x, D_t)\, u(x, t) = f(x, t) \text{ sur } \boldsymbol{R}^n \times [0, T] \quad (T > 0), \\ D_t^{j-1}\, u(x, 0) = u_j(x) \text{ dans } \boldsymbol{R}^n \quad (1 \leqq j \leqq m), \end{cases}$$

soit bien posé dans L^2.

Cette Note est une suite de Takeuchi ([7] à [15]).

1.1. Nos conditions s'expriment comme suit:

La première condition pour la partie principale est:

Condition (A.1). Pour $|\alpha| = 2j$ et $1 \leqq j \leqq m$, on a $a_{\alpha j}(x) = a_{\alpha j}$ (Constante).

On note $a_j^0(\xi)$ le symbole principal de l'opérateur $a_j(x, D_x)$ et $P_{2m}(\xi, \tau)$ le symbole principal de l'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ au sens de la 2-évolution de Petrowsky [4]:

$$a_j^0(\xi) = \sum_{|\alpha|=2j} a_{\alpha j}\, \xi^\alpha \quad (1 \leqq j \leqq m),$$

$$P_{2m}(\xi, \tau) = \tau^m + a_1^0(\xi)\, \tau^{m-1} + \cdots + a_m^0(\xi).$$

La deuxième condition pour la partie principale est:

Condition (A.2). Les racines (en τ) de l'équation $P_{2m}(\xi, \tau) = 0$ sont non nulles, réelles, distinctes pour $\xi \in \boldsymbol{R}^n \setminus 0$:

$$P_{2m}(\xi, \tau) = \prod_{j=1}^m (\tau - \lambda_j^0(\xi)), \ \lambda_j^0(\xi) \neq \lambda_k^0(\xi) \quad (j \neq k, \ \xi \in \boldsymbol{R}^n \setminus 0),$$